Statistique

Corrigé du partiel du 18 mars 2003

Questionnaire à choix multiples (6 points)

1. [1] Si X et Y sont indépendants, et de moyennes nulles, $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] = 0$, $\mathrm{var}(XY)$ vaut

   ○ $(\mathrm{var}(X) + \mathrm{var}(Y))^2 - \mathrm{var}(X+Y)$ ○ $\mathrm{var}(X+Y) - \mathrm{var}(X)\mathrm{var}(Y)$
   ○ $\mathrm{var}(X)\mathbb{E}[Y^2] + \mathrm{var}(Y)\mathbb{E}[X^2]$ ⊗ $\mathrm{var}(X)\mathrm{var}(Y)$

2. [2] Soit $f(x,y) = e^{-y}\,\mathbb{I}_{0<x<y<\infty}$ et $A = \{x+y < 1\}$. Alors $\int_A f(x,y)dxdy$ vaut

   ○ $1 - e^{-1}$ ⊗ $1 - 2\,e^{-1/2} + e^{-1}$ ○ $2\,e^{-1/2} - e^{-1}$ ○ e^{-1}

3. [1] Si X et Y sont deux variables aléatoires non indépendantes, on a la relation

   ○ $\mathrm{var}(X|Y) \leq \mathrm{var}(X)$ ○ $\mathrm{var}(X|Y) \geq \mathrm{var}(X)$
   ○ $\mathrm{var}(X|Y) = \mathrm{var}(X)$ ⊗ aucune de ces relations

4. [1] Si X et Y sont des variables aléatoires telles que $\mathrm{var}(X) = \mathrm{var}(Y) = 7\mathrm{cov}(X,Y) = 1$, $\mathrm{cov}(2X - 5Y, 5X + 2Y)$ vaut

   ○ 0 ○ 20 ⊗ $-21/7$ ○ $14/7$ ○ $28/7$

5. [1] Si $X_1, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires iid de même fonction de répartition F, la fonction de répartition de $\max(X_1, \ldots, X_n)$ est

   ○ $1 - (1-F)^n$ ⊗ F^n ○ $nF^{n-1}F'$ ○ $n\{1-F\}^{n-1}F'$

EXERCICE 1 (8+2 points)

1. On a [1/2 point]

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \int_0^\infty f(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2 &= \int_0^\infty e^{-x_1} \int_0^\infty e^{-x_2(1+\lambda\, e^{-x_1})}\,dx_2\,dx_1\\ &= \int_0^\infty \frac{e^{-x_1}}{1+\lambda\, e^{-x_1}}\,dx_1\,.\end{aligned}$$

   Si $\lambda > -1$, $1+\lambda\, e^{-x_1} > 1+\lambda$ implique que [1 point]

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x_1}}{1+\lambda\, e^{-x_1}}\,dx_1 < \int_0^\infty \frac{e^{-x_1}}{1+\lambda}\,dx_1 < \infty$$

   et, si $\lambda < 1$, le terme $1+\lambda\, e^{-x_1}$ est négatif pour certaines valeurs de x_1, donc $\exp\{-x_2(1+\lambda\, e^{-x_1})\}$ n'est pas intégrable. Pour $\lambda = 1$, l'intégrale [1 point] en x_2 est définie et, en posant $z_1 = \exp -x_1$,

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x_1}}{1+\lambda\, e^{-x_1}}\,dx_1 = \int_0^1 \frac{1}{1+\lambda z_1}\,dz_1$$

   n'est pas intégrable. [1 point]

2. Il vient, si $\lambda \neq 0$, [1/2 point]

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x_1}}{1+\lambda\, e^{-x_1}}\,dx_1 = \int_0^1 \frac{1}{1+\lambda z_1}\,dz_1 = \frac{\log\{1+\lambda\}}{\lambda} = \frac{1}{\kappa}$$

   et, si $\lambda = 0$, [1/2 point]

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x_1-x_2}\,dx_1\,dx_2 = \left(\int_0^\infty e^{-x}\,dx\right)^2 = 1$$

   Donc, si $\lambda > 0$, $1+\lambda > 1$ et $\log\{1+\lambda\} > 0$ et, si $\lambda < 0$, $1+\lambda < 1$ et $\log\{1+\lambda\} < 0$. [1 point]

3. La loi conditionnelle de X_2 sachant $X_1 = x_1$ a comme densité [1 point]

$$f(x_2|x_1) = \frac{f(x_1,x_2)}{f(x_1)} \propto \exp\left\{-x_2 - \lambda\, e^{-x_1} x_2\right\} = \exp\left\{-x_2\left(1+\lambda\, e^{-x_1}\right)\right\}$$

donc on reconnait la forme fonctionnelle d'une loi exponentielle

$$\mathcal{E}xp\left(1+\lambda\, e^{-x_1}\right)\ .$$

Par conséquent, [1 point]

$$\mathbb{E}[X_2|X_1]=\frac{1}{1+\lambda\, e^{-X_1}} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{var}(X_2|X_1)=\left(1+\lambda\, e^{-X_1}\right)^{-2}\ .$$

4. Comme X_1 a comme loi marginale la loi de densité sur $\mathbb{R}_+$ [1 point]

$$\kappa\,\frac{e^{-x_1}}{1+\lambda\, e^{-x_1}}$$

et que [1/2 point]

$$\mathbb{E}[X_2]=\mathbb{E}[\mathbb{E}[X_2|X_1]]\,,$$

il vient [1 point]

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_2] &= \int_0^\infty \left(1+\lambda\, e^{-x_1}\right)^{-1}\kappa\,\frac{e^{-x_1}}{1+\lambda\, e^{-x_1}}dx_1\\
&= \kappa\int_0^\infty \frac{e^{-x_1}}{(1+\lambda\, e^{-x_1})^2}dx_1\\
&= \kappa\int_0^1 \frac{1}{(1+\lambda\, z_1)^2}\,dz_1\\
&= \frac{\kappa}{\lambda}\left\{1-\frac{1}{1+\lambda}\right\}\\
&= \kappa/(1+\lambda)
\end{aligned}$$

Exercice 2 (10+2 points)

1. L'ensemble

$$\begin{aligned}\mathcal{A}=&\{(x_1,x_2);0\le x_1\le 1,\,0\le x_2\le 1-x_1\}\\ &\cup\{(x_1,x_2);1\le x_1\le 2,\,0\le x_2\le x_1-1\}\end{aligned}$$

est constitué de deux triangles symétriques reliant $(0,0)$, $(1,0)$ et $(0,1)$, et $(1,0)$, $(2,0)$ et $(2,1)$, respectivement. Donc X_1 varie entre 0 et 2 et X_2 entre 0 et 1. [1 point] [1 point]

2. La surface de $\mathcal{A}$ est 1 et la densité du vecteur (X_1, X_2) est donc l'indicatrice de $\mathcal{A}$, $\mathbb{I}_{\mathcal{A}}$. [1/2 point]

3. Les symétries de $\mathcal{A}$ font que $\mathbb{E}[X_1] = 1$ et que $\mathbb{E}[X_1|X_2 = x_2] = 1$ pour tout x_2, par conséquent [1/2 point]

$$\mathrm{cov}(X_1, X_2) = \mathbb{E}[X_2(X_1 - 1)] = \mathbb{E}[X_2 \mathbb{E}[X_1 - 1|X_2]] = 0\,.$$

[1 + 1 point si calcul]
[1 point]

4. Comme X_1 sachant $X_2 = x_2$ appartient à $[0, 1 - x_2] \cup [1 + x_2, 2]$, la loi de X_1 sachant $X_2 = x_2$ est uniforme sur cet ensemble et a comme densité $1/(1 - x_2 + 2 - 1 - x_2) = 1/(2 - 2x_2)$, donc [1/2 point] [1/2 point]

$$\begin{aligned} 1 + \mathrm{var}(X_1|X_2 = x_2) &= \frac{1}{2 - 2x_2} \int_0^{1-x_2} x_1^2 dx_1 + \frac{1}{2 - 2x_2} \int_{1+x_2}^{2} x_1^2 dx_1 \\ &= \frac{1}{6(1 - x_2)} \left\{ (1 - x_2)^3 + 8 - (1 + x_2)^3 \right\} \\ &= \frac{4 - 3x_2 - x_2^3}{3(1 - x_2)} = \frac{4 + x_2 + x_2^2}{3} \end{aligned}$$

[1/2 point]

Ainsi [1 point]

$$\mathrm{var}(X_1|X_2 = x_2) = \frac{1 + x_2 + x_2^2}{3}$$

[1/2 point]

et on vérifie que pour le cas limite $x_2 = 1$, $\mathrm{var}(X_1|X_2 = 1)$ vaut bien 1. Donc X_1 et X_2 ne sont pas indépendants. [1/2 point]

5. Comme $dz_2/dx_2 = \beta x_2^{\beta-1}$ et [1/2 point]

$$dz_1/dx_1 = \begin{cases} \alpha x_1^{\alpha-1} & \text{si } x_1 \leq 1 \\ \alpha(2 - x_1)^{\alpha-1} & \text{si } x_1 \geq 1 \end{cases}$$

la densité de (X_1, X_2) est donnée par la formule du Jacobien: [1 point]

$$\alpha\beta \left(x_1^{\alpha-1} \mathbb{I}_{[0,1]}(x_1) \mathbb{I}_{\mathcal{A}}(x_1^{\alpha}, x_2^{\beta}) + (2 - x_1)^{\alpha-1} \mathbb{I}_{[1,2]}(x_1) \mathbb{I}_{\mathcal{A}}(2 - (2 - x_1)^{\alpha}, x_2^{\beta}) \right) x_2^{\beta-1}\,.$$

Comme α et β sont plus petits que 1, les transformations de Z_i à X_i sont contractantes vers les coins $(0, 0)$ et $(2, 0)$, et donc, si (Z_1, Z_2) est dans $\mathcal{A}$, (X_1, X_2) est également dans $\mathcal{A}$. [1 point]