Université Paris Dauphine

Maîtrise MASS
Modèle linéaire

Examen du mercredi 20 décembre 2000

Tous documents autorisés
Les deux exercices sont indépendants

Exercice 1

1) On note $y = (y_1,y_2,y_3)$ l'observation d'une variable multinomiale à 3 catégories de paramètre $p = (p_1,p_2,p_3)$ sur un échantillon de taille n fixée.
Etablir l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{p}$ du paramètre p et préciser la matrice de variance-covariance de la distribution asymptotique de ${}^t(\hat{p}_1\ \hat{p}_2)$.

2) En déduire un intervalle de confiance de $p_1 p_2$ de sécurité approximativement égale à $1 - \alpha$.

3) Etant donné une variable qualitative Q à I modalités, on note $y_i = (y_{i1},y_{i2},y_{i3})$ l'observation d'une variable multinomiale à 3 catégories sur un échantillon de taille n_i fixée, pour la modalité i de Q . On suppose que les I observations $y_1,y_2,..,y_I$ sont indépendantes et on note $\pi_i = (\pi_{i1},\pi_{i2},\pi_{i3})$ le paramètre de la distribution de y_i.
Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance de $\pi = (\pi_1,\pi_2,..,\pi_I)$.

4) On considère l'hypothèse

$$H_0 : \forall j = 1,2,3, \quad \pi_{1j} = \pi_{2j} = ... = \pi_{Ij}.$$

. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance de π_{ij} sous H_0.

. Calculer la statistique du rapport de vraisemblance sous H_0 et préciser la régle de décision pour un test de niveau asymptotique α.

Exercice 2

On note $Y_i = \begin{pmatrix} Y_{1i} \\ Y_{2i} \end{pmatrix}$, $i = 1,..,n$, des vecteurs aléatoires observables de $\mathbb{R}^2$, indépendants, de même loi. Y_{1i} pourra représenter, par exemple, la quantité échangée sur le marché d'un bien donné à la date i et Y_{2i} pourra représenter le prix de ce bien.

On suppose qu'il existe des paramètres réels inconnus, a, b, σ_1^2, σ_2^2 tels que :

(1) $Y_{1i} = a + u_{1i}$

(2) $Y_{2i} = bY_{1i} + u_{2i}, \qquad i = 1,..,n$

où le vecteur $u_i = \begin{pmatrix} u_{1i} \\ u_{2i} \end{pmatrix}$ défini par par les équations (1) et (2) a pour loi la loi normale de moyenne $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et de matrice de variance-covariance $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$.

On pose $\theta = (a,b,\sigma_1^2,\sigma_2^2)$

1. Le modèle statistique pertinent est un modèle d'échantillonage du type $[\mathbb{R}^2,(P_\theta,\theta \in \Theta)]^n$. Expliciter P_θ (la loi de Y_i) et Θ l'espace des paramètres.

2. Montrer que la densité de Y_i, $i = 1,..,n$, est égale à
$$f(y_i;\theta) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma_1^2\sigma_2^2}} \exp\left[-\frac{(y_{1i}-a)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(y_{2i}-by_{1i})^2}{2\sigma_2^2}\right].$$
En déduire que l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ, noté $\hat{\theta}_n = (\hat{a}_n,\hat{b}_n,\hat{\sigma^2_{1n}},\hat{\sigma^2_{2n}})$ est donné par :
$$\hat{a}_n = \bar{Y}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_{1i}; \qquad \hat{b}_n = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_{1i}Y_{2i}}{\sum_{i=1}^n Y_{1i}^2};$$
$$\hat{\sigma^2_{1n}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (Y_{1i}-\bar{Y}_1)^2; \qquad \hat{\sigma^2_{2n}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (Y_{2i}-\hat{b}_nY_{1i})^2$$

3. Calculer la loi asymptotique de $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta)$.

4. Donner la statistique de Wald, notée ξ_n^W, pour l'hypothèse nulle $H_0 : b = 1$ et préciser la régle de décision pour un test de niveau asymptotique α.

5. Quelle est la loi exacte (pour n fixé), sous H_0, de $\frac{n-1}{n}\xi_n^W$ où ξ_n^W est la statistique de Wald obtenue à la question précédente. [Indication: on pourra d'abord calculer la loi conditionnelle de $\frac{n-1}{n}\xi_n^W$ sachant $(Y_{11},..,Y_{1n})$]. En déduire un test exact de niveau α pour l'hypothèse nulle $b = 1$.