Université Paris Dauphine Année 2002-2003
U.F.R. Mathématiques de la Décision
MD4 - Modèles Linéaires et généralisations

Correction Examen Terminal

Exercice 2

1 $y_i \sim \mathcal{E}(\lambda_i)$ et $\lambda_i = \exp(-\alpha - \beta x_i)$.
Soit $y = (y_1, \ldots, y_n)$,

$$f(y; \alpha, \beta) = \prod_{i=1}^{n} \left[\exp(-\alpha - \beta x_i) \exp\left(-e^{-\alpha-\beta x_i} y_i\right) 1_{\mathbb{R}^+}(y_i)\right].$$

Ainsi,

$$\log\left[f(y; \alpha, \beta)\right] = -\alpha n - \beta \sum_{i=1}^{n} x_i - e^{-\alpha} \sum_{i=1}^{n} e^{-\beta x_i} y_i.$$

Les équations de vraisemblance sont alors :

$$\begin{aligned} -n + \sum_{i=1}^{n} e^{-\alpha} \sum_{i=1}^{n} e^{-\beta x_i} y_i &= 0 \\ -\sum_{i=1}^{n} x_i + e^{-\alpha} \sum_{i=1}^{n} e^{-\beta x_i} x_i y_i &= 0. \end{aligned}$$

On ne peut pas résoudre ce système analytiquement.

2 On montre aisément que

$$I(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{bmatrix}.$$

3 Lorsque $n \longrightarrow \infty$,

$$\sqrt{n} \begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{pmatrix} \longrightarrow_{\mathcal{L}} \mathcal{N}_2 \left[\begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{pmatrix}, nI^{-1}(\alpha, \beta)\right) \quad ;$$

$$\begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{pmatrix} \longrightarrow_{ps} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4 On souhaite tester $H_0 : (\alpha, \beta) = (0,0)$ contre $H_1 : \overline{H_0}$. L'hypothèse H_0 est telle que $g(\alpha, \beta) = (0,0)$ avec $g(\alpha, \beta) = (\alpha, \beta)$.

Test de Wald :

Lorsque $n \longrightarrow \infty$,

$$\sqrt{n}\left(g\left(\hat{\alpha}, \hat{\beta}\right) - g(\alpha, \beta)\right) \longrightarrow_{\mathcal{L}} \mathcal{N}_2\left[(0,0), ng'(\alpha, \beta) I^{-1}(\alpha, \beta)\left[g'(\alpha, \beta)\right]'\right).$$

Ainsi, sous l'hypothèse H_0, $\sqrt{n}\left(\hat{\alpha}, \hat{\beta}\right) \longrightarrow_{\mathcal{L}} \mathcal{N}_2\left[(0,0), nI^{-1}(\alpha, \beta)\right]$.
La statistique du test de Wald est alors $W = \left[\left(\hat{\alpha}, \hat{\beta}\right)\right]' I(\alpha, \beta)\left(\hat{\alpha}, \hat{\beta}\right)$.
Sous l'hypothèse H_0, W suit asymptotiquement une loi $\chi^2(2)$.
Pour un niveau asymptotiquement égal à α, le test de Wald est tel que l'hypothèse H_0 est rejetée si

$$w = n\left(a^2 + ab\right) + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 (b^2 + ab) + \sum_{i=1}^{n} x_i \left(2ab + a^2\right) > F^{-1}_{\chi^2(2)}(1 - \alpha).$$

Test du rapport de vraisemblance :

La statistique du test du rapport de vraisemblance est

$$L = 2\left[-\hat{\alpha} n - \hat{\beta} \sum_{i=1}^{n} x_i - e^{-\hat{\alpha}} \sum_{i=1}^{n} e^{-\hat{\beta} x_i} y_i + \sum_{i=1}^{n} y_i\right].$$

Sous l'hypothèse H_0, L suit asymptotiquement une loi $\chi^2(2)$.
Pour un niveau asymptotiquement égal à α, le test du rapport de vraisemblance est tel que l'hypothèse H_0 est rejetée si

$$l = 2\left[-an - b \sum_{i=1}^{n} x_i - e^{-a} \sum_{i=1}^{n} e^{-bx_i} y_i + \sum_{i=1}^{n} y_i\right] > F^{-1}_{\chi^2(2)}(1 - \alpha).$$

5 Application numérique :

• $w = 50.30 > 5.99$ et donc, d'après le test de Wald, l'hypothèse H_0 est rejetée ;

• $l = 47.05 > 5.99$ et donc, d'après le test du rapport de vraisemblance, l'hypothèse H_0 est rejetée.

Exercice 3

1

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\theta=\theta_1|X=x) &= \frac{\mathbb{P}(X=x|\theta=\theta_1)\,\mathbb{P}(\theta=\theta_1)}{\mathbb{P}(X=x|\theta=\theta_1)\,\mathbb{P}(\theta=\theta_1)+\mathbb{P}(X=x|\theta=\theta_2)\,\mathbb{P}(\theta=\theta_2)} \\
&= \frac{\alpha\theta_1^x\exp(-\theta_1)}{\alpha\theta_1^x\exp(-\theta_1)+(1-\alpha)\theta_2^x\exp(-\theta_2)} \quad ; \\
\mathbb{P}(\theta=\theta_1|X=x) &= \frac{(1-\alpha)\theta_2^x\exp(-\theta_2)}{\alpha\theta_1^x\exp(-\theta_1)+(1-\alpha)\theta_2^x\exp(-\theta_2)}.
\end{aligned}$$

2 L'estimateur de Bayes de θ associé à la fonction de perte $L_1(a,\theta)$ est $a_1(x)=\arg\min_a \mathbb{E}_{\theta|X=x}[L_1(a,\theta)]$.

$$\mathbb{E}_{\theta|X=x}[L_1(a,\theta)] = 50\times 1_{a=\theta_1}\mathbb{P}(\theta=\theta_2|X=x)+20\times 1_{a=\theta_2}\mathbb{P}(\theta=\theta_1|X=x).$$

Donc,

$$\mathbb{E}_{\theta|X=x}[L_1(\theta_1,\theta)] = \frac{50(1-\alpha)\theta_2^x\exp(theta_2)}{\alpha\theta_1^x\exp(-\theta_1)+(1-\alpha)\theta_2^x\exp(-\theta_2)} \quad ;$$

$$\mathbb{E}_{\theta|X=x}[L_1(\theta_2,\theta)] = \frac{20\alpha\theta_1^x\exp(-\theta_1)}{\alpha\theta_1^x\exp(-\theta_1)+(1-\alpha)\theta_2^x\exp(-\theta_2)}.$$

On montre aisément que $\mathbb{E}_{\theta|X=x}[L_1(\theta_1,\theta)] < \mathbb{E}_{\theta|X=x}[L_1(\theta_2,\theta)]$
si et seulement si $x < \left\lfloor \dfrac{(\theta_2-\theta_1)+\log(2\alpha/(5(1-\alpha)))}{\log(\theta_2/\theta_1)} \right\rfloor$.
Par conséquent,

$$a_1(x) = \begin{cases} \theta_1 & \text{si} \quad x < \left\lfloor \dfrac{(\theta_2-\theta_1)+\log(2\alpha/(5(1-\alpha)))}{\log(\theta_2/\theta_1)} \right\rfloor \\ \theta_2 & \text{sinon} \end{cases} .$$

3

$$\mathbb{E}_{\theta|X=x}[L_2(\theta_1,\theta)] = \frac{(\theta_1-\theta_2)^2(1-\alpha)\theta_2^x\exp(-\theta_2)}{\alpha\theta_1^x\exp(-\theta_1)+(1-\alpha)\theta_2^x\exp(-\theta_2)} \quad ;$$

$$\mathbb{E}_{\theta|X=x}[L_1(\theta_2,\theta)] = \frac{(\theta_1-\theta_2)^2\alpha\theta_1^x\exp(-\theta_1)}{\alpha\theta_1^x\exp(-\theta_1)+(1-\alpha)\theta_2^x\exp(-\theta_2)}.$$

On montre aisément que $\mathbb{E}_{\theta|X=x}[L_1(\theta_1,\theta)] < \mathbb{E}_{\theta|X=x}[L_1(\theta_2,\theta)]$
si et seulement si $x < \left\lfloor \dfrac{(\theta_2-\theta_1)+\log(\alpha/(1-\alpha))}{\log(\theta_2/\theta_1)} \right\rfloor$.

Par conséquent,

$$a_2(x) = \begin{cases} \theta_1 & \text{si} \quad x < \left[\dfrac{(\theta_2 - \theta_1) + \log\left(\alpha/(1-\alpha)\right)}{\log\left(\theta_2/\theta_1\right)}\right] \\ \theta_2 & \text{sinon} \end{cases} .$$

Exercice 1

1 Pour tout $i \in \{1, \ldots, 12\}$, nous supposons que :

$$\log(V_i) = \beta_1 + \beta_2 \log(l_i) + \beta_3 \log(L_i) + E_i.$$

La validité du postulat de Dempster peut se ramener à test sur les paramètres du modèle linéaire précédent. Il s'agit en effet de tester l'hypothèse H_0 : $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\log(\pi/6), 2, 1)$ (l'œuf est un ellipsoïde) contre l'hypothèse H_1 : $\overline{H_0}$.

3 On applique le test de Fisher dont le statistique de test est

$$F = \frac{\left(\mathrm{SCR}_{H_0} - \mathrm{SCR}_{H_1}\right)/3}{\mathrm{SCR}_{H_1}/9}.$$

Sous l'hypothèse H_0, $F \sim \mathcal{F}(3, 9)$.
Ainsi, pour un niveau exactement égal à α, l'hypothèse H_0 est rejetée si

$$f > F^{-1}_{\mathcal{F}(3,9)}(1-\alpha).$$

4 Comme $f = 0.59 < 3.86$, nous ne pouvons pas rejeter l'hypothèse selon laquelle l'œuf est un ellipsoïde.