Corrigé du partiel de Modèles linéaires généralisés

Exercice 1

1. D'aprés le lemme de Neyman–Pearson, le test au niveau α de $H_0 : \theta = 0$ contre $H_1 : \theta = \theta_1 > 0$ est de la forme
$$\frac{L(\theta_0|\mathbf{y})}{L(\theta_1|\mathbf{y})} = \frac{L(\theta_0|\overline{y})}{L(\theta_1|\overline{y})} \geq t_\alpha \,.$$
Il conduit à une région d'acceptation de la forme
$$A_\alpha = \{\overline{y} \geq k_\alpha\} \qquad P_0(A_\alpha) = 1 - \alpha \,,$$
qui ne dépend pas de θ_1, donc fonctionne aussi pour l'hypothèse $H_1 : \theta > 0$. Le seuil k_α se déduit de la distribution de $\overline{y}$ *(que certains ignorent toujours !!)*,
$$\overline{y} \sim \mathcal{N}(0, 1/n) \,,$$
soit $k_\alpha = F^{-1}_{\mathcal{N}(0,1)}(1-\alpha)/\sqrt{n}$. Pour $\overline{y} = 1.12$ et $\alpha = 5\%$, on rejette donc l'hypothèse H_0.
2. La définition du facteur de Bayes est *(cf. cours)*
$$B^\pi_{01} = \frac{\int f_0(x|\theta_0)\pi(\theta_0)d\theta_0}{\int f_1(x|\theta_1)\pi(\theta_1)d\theta_1} \Big/ \frac{\pi(H_0)}{\pi(H_1)} \,,$$
c'est à dire un rapport de vraisemblance intégré. La loi a posteriori associée à la loi a priori $\theta \sim \mathcal{N}(0, \tau^2)$ est *(cf. cours)*
$$\mathcal{N}\left(\frac{\tau^2 n\overline{y}}{1+n\tau^2}, \frac{\tau^2}{1+n\tau^2}\right)$$
d'où le facteur de Bayes
$$\sqrt{\frac{1}{1+n\tau^2}} \exp\left\{\frac{n\tau^2\overline{y}^2}{2(n\tau^2+1)}\right\}$$
(en corrigeant l'erreur de frappe). Quand τ tend vers l'infini, ce facteur tend vers 0 *(Aucune bonne réponse !)*

3. Si $\tau = 1$,
$$B_{01}^{\pi} = \sqrt{\frac{1}{1+n}} \exp\left\{\frac{n\overline{y}^2}{1+n}\right\}$$
(sans surprise).
4. Le même lemme de Neyman-Pearson s'applique pour donner la même forme de région d'acceptation. Par contre, le niveau du test doit etre calculé pour $\theta = 1$, donnant $k_\alpha = 1 + F^{-1}_{\mathcal{N}(0,1)}(1-\alpha)/sqrtn$. Dans ce cas, on acceptre H_0.
5. On utilise la loi a posteriori trouvée dans la question 2. Donc
$$\Pr(\theta \leq 1|\overline{y}) = \Phi\left(\frac{n(\overline{y}-1)}{n+\tau^2}\sqrt{\frac{n+\tau^2}{n\tau^2}}\right).$$
(aucune bonne réponse)

EXERCICE 2

$\sigma \in \mathbb{R}_+^*$ sont supposés connus. Nous supposons que $\mu(x) = \exp(\alpha + \beta x)$

1. La log-vraisemblance est
$$\frac{-1}{2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \exp(\alpha + \beta x_i))^2$$
et la matrice d'information de Fisher vaut
$$I_n(\alpha,\beta) = \begin{bmatrix} \sum_i \exp 2(\alpha+\beta x_i) & \sum_i x_i \exp 2(\alpha+\beta x_i) \\ \sum_i x_i \exp 2(\alpha+\beta x_i) & \sum_i x_i^2 \exp 2(\alpha+\beta x_i) \end{bmatrix}$$
(Je rappelle pour certain(e)s que la derivée de $\exp x$ *est* $\exp x$*.)*
2. Les équations de vraisemblance sont
$$\sum_i (y_i - \exp(\alpha+\beta x_i))\exp(\alpha+\beta x_i) = 0$$
et
$$\sum_i (y_i - \exp(\alpha+\beta x_i))\exp(\alpha+\beta x_i)x_i = 0\,.$$
Elles font intervenir des fonctions transcendantales dans une expression linéaire, donc ne peuvent être résolues sous forme explicite.

3. Le test de Wald est fondé sur la loi asymptotique de $\hat{\beta}$ sous H_0, soit

$$\hat{\beta} \approx \mathcal{N}\left(0, I^{22}(\alpha,\beta)\right) ,$$

où I^{22} est le terme $(2,2)$ de l'inverse de $I_n(\alpha,\beta)$. La statistique de Wald est donc $\xi_n^W = \hat{\beta}^2/I^{22}(\hat{\alpha},\hat{\beta})$. Pour le test du rapport de vraisemblance, $\hat{\alpha}_0 = \log \overline{y}$ et le reste est du cours.

4. Le test de Wald est fondé sur la loi asymptotique de $(\hat{\alpha},\hat{\beta}) - (1,1)$ qui est simplement une $\mathcal{N}_2(0, I_n(\alpha,\beta)^{-1})$ sous H_0. Donc la statistique de Wald est $\xi_n^W = (\hat{\alpha}-1, \hat{\beta}-1) I_n(\hat{\alpha},\hat{\beta})(\hat{\alpha}-1,\hat{\beta}-1)^T$, à comparer à un χ_2^2.

Exercice 3

1. Comme $f'(u) = 2(1-u^2)/(1+u^2)^2$, le maximum est bien atteint en $u = 1$ et le minimum en $u = -1$.
2. Voir question suivante *(aucune bonne réponse !)*.
3. Comme $(\theta > 0)$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{-\alpha\theta + \log(1+(x-\theta)^2)\right\} = -\alpha + 2\,\frac{(x-\theta)}{1+(x-\theta)^2} ,$$

et $(\theta < 0)$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\alpha\theta + \log(1+(x-\theta)^2)\right\} = \alpha + 2\,\frac{(x-\theta)}{1+(x-\theta)^2} ,$$

ces fonctions sont de signe constant si $\alpha > 1$ et donc le maximum a posteriori se situe *toujours* en $\hat{\theta} = 0$. *(Pour information, la dérivée de $|\theta|$ vaut 1 si $\theta > 0$ et -1 si $\theta < 0$...)*

4. C'est le cas opposé d'un point de vue statistique mais le même du point de vue mathématique. Donc le maximum a posteriori se situe toujours en $\hat{\theta} = x$.