Université Paris Dauphine
U.F.R. Mathématiques de la Décision
MD4 - Modèles Linéaires et Généralisations

Année 2002-2003

Examen Terminal

Durée deux heures, Avec Documents, Trois exercices indépendants

Exercice 1 (7 pts)

A.P. Dempster a mesuré les deux diamètres d'une douzaine d'œufs. A l'aide d'une méthode expérimentale basée sur l'immersion des œufs dans un liquide (ici de l'eau), il a pu déterminer le volume de ceux-ci.

L'objectif de Dempster était de vérifier l'hypothèse d'ellipsoïdité de l'œuf. Il souhaitait alors vérifier si la relation

$$V = \left(\frac{\pi}{6}\right) l_1 l_2 l_3$$

(V est le volume d'un ellipsoïde et (l_1, l_2, l_3) ses trois allongements) s'appliquait à l'œuf. Dans le cas présent, $l_1 = l_2 = l$ (largeur) et $l_3 = L$ (longueur).

1 (2 pts) Montrer que l'on peut ramener le test de la validité du postulat de Dempster ("l'œuf est un ellipsoïde") contre son alternative à un test sur les paramètres d'un modèle linéaire (M) à définir.

Nous supposons que l'erreur résiduelle du modèle (M) est distribuée suivant une loi gaussienne.

2 (2 pts) Pour un niveau asymptotiquement égal à α, proposer un test de la validité du postulat de Dempster.

3 (2 pts) Pour un niveau maintenant exactement égal à α, proposer un nouveau test de la validité du postulat de Dempster.

Notons b_i la réalisation de l'estimateur des moindres carrés de β_i paramètre du modèle (M) et X la matrice du plan d'expérience du modèle (M).

Nous avons :

$$X'X = \begin{bmatrix} 12 & 17.1 & 21.1 \\ 17.1 & 24.4 & 30.1 \\ 21.1 & 30.1 & 37.1 \end{bmatrix}, \ (X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 59.2 & -53.8 & 10 \\ -53.8 & 0.8 & 30 \\ 10 & 30 & -30 \end{bmatrix},$$

$b_1 = 0.56$, $b_2 = 1.60$, $b_3 = 0.63$, $\sum_{i=1}^{12} \left(\log(V_i) - 2\log(l_i) - \log(L_i)\right)^2 = 0.0146$

et $\sum_{i=1}^{12} \left(\log(V_i) - b_1 - b_2\log(l_i) - b_3\log(L_i)\right)^2 = 0.0122$.

n	1	2	3	4	6	7
$F^{-1}_{\chi^2(n)}(0.95)$	3.84	5.99	7.81	9.49	11.07	12.59

n	6	7	8	9	10	11
$F^{-1}_{F(2,n)}(0.95)$	5.14	4.74	4.46	4.26	4.10	3.98
$F^{-1}_{F(3,n)}(0.95)$	4.76	4.35	4.07	3.86	3.71	3.59
$F^{-1}_{F(4,n)}(0.95)$	4.53	4.12	3.84	3.63	3.48	3.36
$F^{-1}_{F(5,n)}(0.95)$	4.39	3.97	3.69	3.48	3.33	3.20
$F^{-1}_{F(6,n)}(0.95)$	4.28	3.87	3.58	3.37	3.22	3.09

5 (1 pt) Pour $\alpha = 5\%$, comparer les résultats obtenus.

Exercice 2 (8 pts)

Nous considérons n variables aléatoires indépendantes $Y_1, \ldots, Y_n$ où Y_i suit une loi Exponentielle de paramètre λ_i ($\mathbb{E}(Y_i) = \frac{1}{\lambda_i}$).
Nous supposons que

$$\log(\mathbb{E}(Y_i)) = \alpha + \beta x_i$$

où α et β sont des paramètres réels inconnus et, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $x_i \in \mathbb{R}$ fixé.

1 (1 pt) Donner les équations de vraisemblance.

2 (1 pt) Calculer la matrice d'information de Fisher $I(\alpha, \beta)$.

3 (1 pt) Notons $\widehat{\alpha}$ et $\widehat{\beta}$ les estimateurs du maximum de vraisemblance des paramètres α et β. Quelle est la loi de probabilité asymptotique du vecteur aléatoire $\left(\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}\right)$?

4 (4 pts) Pour un risque de première espèce asymptotiquement égal à 5%, spécifier les régions critiques des tests de Wald et du rapport de vraisemblance de l'hypothèse H_0 selon laquelle $\alpha = \beta = 0$ contre son alternative H_1.

5 (1 pt) Comparer les résultats obtenus pour $n = 20$, $a = 1.15$ (réalisation de $\widehat{\alpha}$), $b = 0.9$ (réalisation de $\widehat{\beta}$), $\sum_{i=1}^{20} x_i = -1.48$, $\sum_{i=1}^{20} x_i^2 = 6.3$, $\sum_{i=1}^{20} y_i = 64.26$ et $\sum_{i=1}^{20} \exp(-0.9 x_i)\, y_i = 60.21$.

Exercice 3 (5 pts)

Nous considérons une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson de paramètre θ où $\theta \in \Theta = \{\theta_1, \theta_2\}$ avec $0 < \theta_1 < \theta_2$. Nous nous plaçons dans un contexte bayésien et nous considérons que le paramètre θ suit quant à lui une loi de probabilité a priori telle que $\mathbb{P}(\theta = \theta_1) = \alpha$ avec $\alpha \in [0, 1]$ fixé.

1 (1 pt) Calculer la loi a posteriori de θ, loi de θ sachant que $X = x$.

L'espace des décisions possibles est réduit à Θ.

2 (2 pts) Déterminer l'estimateur de Bayes de θ associé à la fonction de perte $L_1(a, \theta) = 50\,(1_{a=\theta_1} 1_{\theta=\theta_2}) + 20\,(1_{a=\theta_2} 1_{\theta=\theta_1})$.

3 (2 pts) Déterminer l'estimateur de Bayes de θ associé à la fonction de perte $L_2(a, \theta) = (a - \theta)^2$. Que se passe-t-il lorsque l'on relaxe l'espace des décisions ?