**Statistique/ Modèles linéaires et généralisations**

**Partiel du 12 novembre 2003**

*Sans documents, durée deux heures. Trois exercices indépendants.*

## Exercice 1

Nous considérons un échantillon $Y_1, \ldots, Y_n$ iid d'une loi normale $\mathcal{N}(\theta, 1)$ où $\theta \in \mathbb{R}$ est un paramètre inconnu.

1. Nous souhaitons tester l'hypothèse $H_0 : \theta = 0$ contre l'hypothèse $H_1 : \theta > 0$. Déterminer le test UPP de $H_0$ contre $H_1$. Pour un risque de première espèce égal à 5%, conclure lorsque $\overline{x} = 1.12$ et $n = 23$ (nous rappellons que $F^{-1}_{\mathcal{N}(0,1)}(0.95) = 1.645$).

Nous souhaitons maintenant tester l'hypothèse $H_0 : \theta = 0$ contre l'hypothèse $H_1 : \theta \neq 0$.

2. Sous la loi a priori (sous $H_1$) $\theta \sim \mathcal{N}(0, \tau^2)$ (et la masse de Dirac en 0 sous $H_0$), montrer que le facteur de Bayes vaut

$$\sqrt{\frac{1}{1+n\tau^2}} \exp\left\{\frac{n^2\tau^2\overline{x}^2}{2(n\tau^2+1)}\right\}$$

et en déduire le minimum en $\tau$. Donner la probabilité minimale correspondante lorsque $\overline{x} = 1.12$ et $n = 23$.

3. Que se passe-t-il lorsque, dans la question précédente, $\tau$ tend vers 1 ?

Nous considérons à présent l'hypothèse nulle $H_0 : \theta < 1$ et l'hypothèse alternative $H_1 : \theta \geq 1$.

4. Donner la procédure de test UPP de Neyman-Pearson au niveau 5% dans ce cas, ainsi que la réponse numérique associée à $\overline{x} = 1.12$ et $n = 23$.
5. Que vaut la probabilité a posteriori dans ce cas si la loi a priori est $\theta \sim \mathcal{N}(1, \tau)$ ? Indiquer sa valeur pour $\overline{x} = 1.12$, $n = 23$ et pour $\tau = 1, 10$.

## Exercice 2

Nous considérons $n$ variables aléatoires indépendantes $Y_1, \ldots, Y_n$ telles que $Y_i \sim \mathcal{N}\left(\mu\left(x_i\right), \sigma^2\right)$ où $x_i \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$ sont supposés connus. Nous supposons que $\mu(x) = \exp(\alpha + \beta x)$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ sont des paramétres inconnus.

1. Donner la log-vraisemblance et la matrice d'information de Fisher apportée par $(Y_1, \ldots, Y_n)$ notée $I_n(\alpha, \beta)$.
2. Donner les équations de vraisemblance et montrer que l'estimateur du maximum de vraisemblance de $\theta = (\alpha, \beta)$ n'est pas disponible sous forme explicite.
3. Nous cherchons à tester l'influence de $x$ sur $Y$, nous considérons alors le test de l'hypothèse $H_0 : \beta = 0$ contre $H_1 : \beta \neq 0$. Étudier les formes des tests de Wald et du rapport de vraisemblance.
4. Nous souhaitons maintenant tester $H_0 : \alpha = \beta = 1$ contre $H_1 : \overline{H_0}$. Expliciter la forme du test de Wald.

## Exercice 3

Soient $X \sim \mathcal{C}(\theta, 1)$, loi de Cauchy de densité $1/\{\pi[1 + (x - \theta)^2]\}$, et $\theta$ muni d'une loi a priori $\pi(\theta) = \exp(-|\theta|)/2$.

1. Montrer que le maximum de la fonction $f(u) = 2u/(1 + u^2)$ est atteint en $u = 1$ et le minimum en $u = -1$.
2. Déduire que le maximum de la loi a posteriori ne dépend pas de $x$.
3. Si la loi a priori est $\pi(\theta) = \alpha \exp(-\alpha|\theta|)/2$, discuter de l'influence de $\alpha$ sur ce maximum.

On considère à présent le cas opposé où $X \sim \exp(-|x - \theta|)$ et $\theta \sim \mathcal{C}(\mu, 1)$.

4. Montrer que le maximum de la loi a posteriori ne dépend pas de $\mu$.