Université Paris Dauphine
U.F.R. Mathématiques de la Décision
Année 2003-2004
MD4 - Modèles Linéaires et généralisations

Feuille de Travaux Dirigés 1
Rappels sur les tests d'hypothèses

L'entier compris 1 et 5 suivant le numéro de l'exercice proposé indique son niveau croissant de difficulté (1 : exercice très facile ... 5 : exercice relativement difficile).

Exercice 0 (1) Rappels de statistique mathématique
Nous considérons un n-échantillon $X_1, \ldots, X_n$ d'une loi de densité

$$\frac{(\alpha+1)x^\alpha}{\beta^{\alpha+1}} 1_{]0,\beta[}(x)$$

où $\alpha > -1$ est un paramètre connu et β est un paramètre inconnu.

1 Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X_i et en déduire un estimateur non biaisé $\widehat{\beta}$ de β.

2 Déterminer une statistique exhaustive Y pour le paramètre β et l'estimateur du maximum de vraisemblance de β.

3 Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire Y et en déduire un estimateur non biaise $\widetilde{\beta}$ de β.

4 Comparer $\widehat{\beta}$ et $\widetilde{\beta}$.

5 Montrer que Y est une statistique complète et en déduire que $\widetilde{\beta}$ est l'estimateur non biaisé optimal de β.

Exercice 1 (2) Nous considérons une variable aléatoire X dont la densité de probabilité est égale à la fonction f_θ suivante :

$$f_\theta(x) = \frac{1}{2\theta\sqrt{x}} \exp\left\{-\frac{\sqrt{x}}{\theta}\right\} 1_{\mathbb{R}_+^*}(x)$$

où θ est un paramètre inconnu strictement positif.
Nous disposons d'un n-échantillon $X_1, \ldots, X_n$ de la loi précédente.

1 Montrer que la variable aléatoire $Z = \frac{2}{\theta}\sqrt{X}$ suit une loi du Khi-deux à 2 degrés de liberté ($\mathcal{X}^2(2)$). En déduire la loi suivie par la variable aléatoire $W = \dfrac{2}{\theta}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{X_i}$.

2 Déterminer le test U.P.P. de risque de première espèce $\alpha \in]0,1[$ de $H_0 : \theta = \theta_0$ contre $H_1 : \theta = \theta_1$ avec $\theta_1 > \theta_0 > 0$.

3 Donner la puissance du test précédent.

Exercice 2 (1) Nous considérons un n-échantillon $X_1, \ldots, X_n$ d'une loi $\mathcal{N}(\theta_0, \sigma^2)$ et un n-échantillon $Y_1, \ldots, Y_m$ d'une loi $\mathcal{N}(\theta_1, \sigma^2)$. Les paramètres θ_0, θ_1 et σ^2 sont inconnus.

1 Rappeler la loi de probabilité des variables aléatoires suivantes :
$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i,\ \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2,\ \overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} Y_i,\ \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{m}\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2.$$

2 Proposer un test de risque de première espèce $\alpha \in]0,1[$ de $H_0 : \theta_0 = \theta_1$ contre $H_1 : \theta_0 \neq \theta_1$.

3 Analyser la sortie SAS suivante mise en oeuvre à l'aide de la procédure TTEST.

Statistics

Variable	N	Lower CL Mean	Mean	Upper CL Mean	Lower CL Std Dev	Std Dev	Upper CL Std Dev
X	91	47.975	50.121	52.267	8.9947	10.305	12.06
Y	109	53.447	54.991	56.535	7.1786	8.1337	9.384

T-Tests

Method	Variance	DF	T-Value	Pr > |t|
Pooled	Equal	198	-3.73	0.0002
Satterthwaite	Unequal	170	-3.66	0.0003

Equality of Variances

Method	Num DF	Den DF	F Value	Pr > F
Folded F	90	108	1.61	0.0187

Exercice 3 (2) Nous considérons un n-échantillon $X_1, \ldots, X_n$ d'une loi $\mathcal{N}\left(0, \frac{1}{\theta}\right)$ où le paramètre inconnu θ est un réel strictement positif.

1 Déterminer le test U.P.P. de risque de première espèce $\alpha \in]0,1[$ de $H_0 : \theta = 1$ contre $H_1 : \theta > 1$.

2 Donner la fonction puissance du test précédent.

3 Application numérique pour $n = 10$ et $\alpha = 0.05$.

Exercice 4 (1) Nous considérons un n-échantillon d'une loi exponentielle de paramètre $1/\theta$ où le paramètre inconnu θ est un réel strictement positif.

1 Déterminer le test U.P.P. de risque de première espèce $\alpha \in]0, 1[$ de $H_0 : \theta = \theta_0$ contre $H_1 : \theta > \theta_0$.

2 Donner la fonction puissance du test précédent.

Exercice 5 (3) Nous considérons une variable aléatoire X de fonction de répartition F continue. F est inconnue ainsi que la médiane θ de la variable aléatoire X (rappelons que θ est la solution, supposée unique, de l'équation $F(x) = 1/2$).

1 Proposer une procédure de test de risque de première espèce $\alpha \in]0, 1[$ de $H_0 : \theta = 0$ contre $H_1 : \theta > 0$, tenant compte du fait que F est inconnue.

Indication : Faire intervenir la variable aléatoire K_n correspondant au nombre de réalisations positives dans l'échantillon $X_1, \ldots, X_n$.

2 Préciser la règle de décision précédente lorsque $n = 5$ et $\alpha = 0.05$.

Exercice 6 (3) Nous considérons un n-échantillon $X_1, \ldots, X_n$ d'une loi $\mathcal{E}(1/\theta)$ et un n-échantillon $Y_1, \ldots, Y_n$ indépendant du précédent d'une loi $\mathcal{E}(1/\theta')$ où les paramètres θ et θ' sont inconnus. Nous désirons tester $H_0 : \theta = \theta'$ contre $H_1 : \theta \neq \theta'$.

1 Pour un risque de première espèce $\alpha \in]0, 1[$, proposer une régle de décision intuitive.

2 Déterminer un test de rapport de vraisemblance.

Exercice 7 (3) Nous considérons un n-échantillon $X_1, \ldots, X_n$ d'une loi de densité $\exp(-(x - \theta))\mathbb{I}_{[\theta, +\infty[}(x)$.

1 Montrer que la statistique $X_{(1)} = \min(X_1, \ldots, X_n)$ est exhaustive pour le paramètre réel inconnu θ.

2 Déterminer le test U.P.P. de risque de première espèce $\alpha \in]0, 1[$ de $H_0 : \theta = \theta_0$ contre $H_1 : \theta > \theta_0$.

3 Calculer la fonction puissance du test précédent.