Université Paris Dauphine
U.F.R. Mathématiques de la Décision
MD4 - Modèles Linéaires et généralisations

Année 2002-2003

Correction feuille de Travaux Dirigés 2

Statistique bayésienne

Exercice 1

1 Notons $I_X(p)$ l'information de Fisher apportée par X sur le paramètre p. La loi non informative de Jeffreys de p est telle que la densité de probabilité $\pi_1(p)$ qui lui est associée est proportionnelle à $\sqrt{I_X(p)}$.
Nous avons $I_X(p) = \dfrac{n}{p(1-p)}$.
De ce fait $\pi_1(p) = \dfrac{p^{-1/2}(1-p)^{-1/2}}{\pi} 1_{[0,1]}(p)$ et $p \sim \text{Beta}(1/2, 1/2)$.
Nous en déduisons que $p|X = x \sim \text{Beta}(x + 1/2, n - x + 1/2)$.
Notons $f_1(p|x)$ la densité de probabilité de $p|X = x$. Nous avons

$$f_1(p|x) = \frac{p^{x-1/2}(1-p)^{n-x-1/2}}{B(x+1/2, n-x+1/2)} 1_{[0,1]}(p).$$

Afin de déterminer l'estimateur MAP , nous maximisons $f_1(p|x)$ par rapport à p. Nous obtenons :

$$\widehat{p}^1 = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad X = 0 \\ 1 & \text{si} \quad X = n \\ \left(\dfrac{X - 1/2}{n-1}\right) & \text{si} \quad X \neq 0, n \end{cases}.$$

L'estimateur bayésien de p basé sur la moyenne de la loi a posteriori noté $\widetilde{p}^1$ est tel que :

$$\widetilde{p}^1 = \mathbb{E}(p|X) = \frac{X + 1/2}{n+1}.$$

2 Nous avons $\pi_2(p) = 1$ et $p|X = x \sim \text{Beta}(x+1, n-x+1)$. Notons $f_2(p|x)$ la nouvelle densité de probabilité de $p|X = x$:

$$f_1(p|x) = \frac{p^x(1-p)^{n-x}}{B(x+1, n-x+1)} 1_{[0,1]}(p).$$

Afin de déterminer l'estimateur MAP , nous maximisons $f_2(p|x)$ par rapport à p. Nous obtenons :

$$\widehat{p}^2 = \left(\frac{X}{n}\right).$$

L'estimateur bayésien de p basé sur la moyenne de la loi a posteriori noté $\widetilde{p}^2$ est tel que :

$$\widetilde{p}^2 = \mathbb{E}(p|X) = \frac{X+1}{n+1}.$$

Exercice 2

$X|\theta \sim \mathbb{P}_{X|\theta}$, $\theta \sim \mathbb{P}_\theta$. Nous considérons la fonction de perte suivante :

$$L(\theta, a) = \begin{cases} k_2(\theta - a) & \text{si} \quad \theta > a \\ k_1(a - \theta) & \text{sinon} \end{cases}.$$

Pour détermioner la règle de Bayes, nous minimisons par rapport à a :

$$\int_\Theta L(\theta, a) d\mathbb{P}_{\theta|X=x}.$$

$\mathbb{P}_{\theta|X=x}$ est la loi conditionnelle de θ sachant $X = x$ et nous supposons que cette loi de probabilité admet une densité notée $\pi(\theta|x)$ par rapport à la mesure de Lebesgue.
Nous avons :

$$\frac{\partial}{\partial a} \int_\Theta L(\theta, a) d\mathbb{P}_{\theta|X=x} = 0$$

$$\begin{aligned}
\iff & \frac{\partial}{\partial a}\left[\int_a^{+\infty} k_2(\theta - a) d\mathbb{P}_{\theta|X=x} + \int_{-\infty}^a k_1(a-\theta) d\mathbb{P}_{\theta|X=x}\right] = 0 \\
\iff & \frac{\partial}{\partial a}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} k_2(\theta - a) d\mathbb{P}_{\theta|X=x} + \int_{-\infty}^a (k_1+k_2)(a-\theta) d\mathbb{P}_{\theta|X=x}\right] = 0 \\
\iff & \frac{\partial}{\partial a}\left[\int_{-\infty}^a (k_1+k_2)(a-\theta) d\mathbb{P}_{\theta|X=x}\right] = k_2
\end{aligned}$$

$$\iff \frac{\partial}{\partial a}\left[\int_{-\infty}^{a}(a-\theta)d\mathbb{P}_{\theta|X=x}\right] = \frac{k_2}{k_1+k_2}$$
$$\iff \mathbb{P}_{\theta|X=x}(\theta<a) + a\frac{\partial}{\partial a}\int_{-\infty}^{a}\pi(\theta|x)d\theta - \frac{\partial}{\partial a}\int_{-\infty}^{a}\theta\pi(\theta|x)d\theta = \frac{k_2}{k_1+k_2}$$

Nous supposons que $\displaystyle\int_{-\infty}^{a}\theta\pi(\theta|x)d\theta$ est convergente.
Nous avons alors :

$$\mathbb{P}_{\theta|X=x}(\theta<a) + a\pi(a|x) - a\pi(a|x) = \frac{k_2}{k_1+k_2}$$
$$\iff \mathbb{P}_{\theta|X=x}(\theta<a) = \frac{k_2}{k_1+k_2}.$$

Exercice 3

1 $X|\theta \sim N(\theta,1)$, $\theta \sim N\left(0,\sigma^2\right)$. Nous avons alors

$$\begin{pmatrix}\theta\\ X\end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\sigma^2 & \sigma^2\\ \sigma^2 & 1+\sigma^2\end{pmatrix}\right).$$
$$\theta|X=x \sim N\left(\frac{\sigma^2 x}{1+\sigma^2},\frac{\sigma^2}{1+\sigma^2},\right).$$

Pour détermnier la règle de Bayes, nous minimisons par rapport à a

$$\int_{\Theta} L_1(\theta,a)d\mathbb{P}_{\theta|X=x}.$$

$\mathbb{P}_{\theta|X=x}$ est la loi de probabilité conditionnelle de θ sachant $X=x$ admettant pour densité $\pi(\theta|x)$ par rapport à la mesure de Lebesgue.

CN1 :

$$\frac{\partial}{\partial a}\int_{\Theta}L(\theta,a)d\mathbb{P}_{\theta|X=x}=0 \iff \frac{\partial}{\partial a}\left[\int_{\Theta}(\theta-a)^2\pi_x(\theta)d\theta\right]=0$$
$$\iff \int_{\Theta}(\theta-a)\pi(\theta|x)d\theta = 0$$

$$\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow \quad a = \frac{\displaystyle\int_\Theta \theta\pi(\theta|x)d\theta}{\displaystyle\int_\Theta \pi(\theta|x)d\theta} \\
&\Longleftrightarrow \quad a(x) = \frac{\sigma^2}{1+\sigma^2}x
\end{aligned}$$

CN2 : Vérifiée.

2 Pour déterminer la règle de Bayes, nous minimisons par rapport à a :

$$\int_\Theta L_2(\theta, a)d\mathbb{P}_{\theta|X=x}.$$

CN1 :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial a}\int_\Theta L_2(\theta, a)d\mathbb{P}_{\theta|X=x} = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial a}\left[\int_\Theta e^{3\theta^2/4}(\theta - a)^2\pi(\theta|x)d\theta\right] = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \int_\Theta e^{3\theta^2/4}(\theta - a)\pi(\theta|x)d\theta = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad a = \frac{\displaystyle\int_\Theta \theta e^{3\theta^2/4}\pi(\theta|x)d\theta}{\displaystyle\int_\Theta e^{3\theta^2/4}\pi(\theta|x)d\theta}
\end{aligned}$$

Nous vérifierons que si $Y \sim N\left(\mu, d^2\right)$ et $a < \frac{1}{2d^2}$, nous avons alors

$$\mathbb{E}\left(Ye^{aY^2}\right) = \frac{\mu}{1-2ad^2}\mathbb{E}\left(e^{aY^2}\right).$$

Ce qui donne ici si $\sigma^2 < 2$, $a(x) = \dfrac{2\sigma^2}{2-\sigma^2}x$.

CN2 : Vérifiée.

Exercice 4

1 Nous avons $X|\theta \sim \mathrm{N}(\theta, 1)$ et $\theta \sim \pi(\theta) = 1$.
Notons $f(\theta|x)$ la densité de probabilité de $\theta|X = x$:

$$f(\theta|x) = \frac{1/(2\pi)\exp\left(-(x-\theta)^2/2\right)}{\int_{-\infty}^{+\infty} 1/(2\pi)\exp\left(-(x-\theta)^2/2\right)d\theta} = 1/(2\pi)\exp\left(-(x-\theta)^2/2\right).$$

De ce fait, $\theta|X = x \sim \mathrm{N}(x, 1)$

2 Le facteur bayésien noté B est :

$$B = \frac{\mathbb{P}(\theta \leq 0|X = x)}{\mathbb{P}(\theta > 0|X = x)}\frac{\mathbb{P}(\theta \leq 0)}{\mathbb{P}(\theta > 0)} = \frac{\Phi(-x)}{\Phi(x)}$$

où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.
Aussi, $\mathbb{P}(\theta \leq 0|x) = \Phi(-x)$. Ainsi, la probabilité a posteriori de l'hypothèse nulle H_0 tend vers ∞ lorsque x tend vers $-\infty$.

3 Nous avons $\pi(\theta) = \frac{1}{2} \times 1_0(\theta) + \frac{1}{2} \times 1$.
Ainsi,

$$\mathbb{P}(\theta = 0|x) = \frac{\exp\left(-x^2/2\right)}{\exp\left(-x^2/2\right) + \int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-(x-\theta)^2/2\right)d\theta} = \frac{1}{1 + \sqrt{2\pi}\exp\left(x^2/2\right)}$$