Université Paris Dauphine
U.F.R. Mathématiques de la Décision
MD4 - Modèles Linéaires et généralisations

Année 2002-2003

Correction Feuille de Travaux Dirigés 3

Tests Asymptotiques

Exercice 1

1 Nous calculons tout d'abord la densité de $Y_i = (Y_i^1, Y_i^2, Y_i^3)$ pour $i = 1, ..., n$. Soit $y_i = (y_i^1, y_i^2, y_i^3)$ une observation de Y_i, et $\theta = (\gamma, \lambda, p)$.
Pour tout i :

$$\begin{aligned} f(y_i, \theta) &= f(y_i^1) \times f(y_i^2 | y_i^1) \times f(y_i^3 | y_i^1, y_i^2) \\ &= \gamma e^{-\gamma y_i^1} \times e^{-\lambda y_i^1} \frac{(\lambda y_i^1)^{y_i^2}}{y_i^2!} \times C_{y_i^2}^{y_i^3} p^{y_i^3} (1-p)^{y_i^2 - y_i^3} \\ &= \gamma e^{-(\gamma+\lambda) y_i^1} \; (\lambda y_i^1)^{y_i^2} \; \frac{p^{y_i^3}(1-p)^{y_i^2 - y_i^3}}{y_i^3! \; (y_i^2 - y_i^3)!}. \end{aligned}$$

Notant $y = (y_1, ..., y_n)$, la log-vraisemblance est alors :

$$\begin{aligned} L_n(y, \theta) &= \sum_{i=1}^n \log f(y_i, \theta) \\ &= n \log \gamma - (\gamma + \lambda) \sum_{i=1}^n y_i^1 + \sum_{i=1}^n y_i^2 \log(\lambda y_i^1) + \sum_{i=1}^n y_i^3 \log p \\ &\quad + \sum_{i=1}^n (y_i^2 - y_i^3) \log(1-p) - \sum_{i=1}^n \log(y_i^3! \; (y_i^2 - y_i^3)!). \end{aligned}$$

Nous calculons ensuite les dérivées partielles de L_n par rapport à λ, γ, p, soit

$$\frac{\partial L_n(y, \theta)}{\partial \gamma} = \frac{n}{\gamma} - \sum_{i=1}^n y_i^1$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L_n(y,\theta)}{\partial \lambda} &= -\sum_{i=1}^{n} y_i^1 + \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}{\lambda} \\
\frac{\partial L_n(y,\theta)}{\partial p} &= \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i^3}{p} - \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i^2 - y_i^3)}{1-p}.
\end{aligned}
$$

D'où, en remarquant $\mathbb{E}(Y_i{}^2) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y_i{}^2|Y_i{}^1) = \mathbb{E}(\lambda Y_i{}^1) = \frac{\lambda}{\gamma}$ et $\mathbb{E}(Y_i{}^3) = p\lambda/\gamma$ (même calcul).

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\frac{\partial L_n(Y,\theta)}{\partial \gamma}\right) &= \frac{n}{\gamma} - \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(Y_i{}^1) = \frac{n}{\gamma} - \frac{n}{\gamma} = 0 \\
\mathbb{E}\left(\frac{\partial L_n(Y,\theta)}{\partial \lambda}\right) &= -\frac{n}{\gamma} + \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(Y_i{}^2) = 0 \\
\mathbb{E}\left(\frac{\partial L_n(Y,\theta)}{\partial p}\right) &= \frac{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(Y_i^3)}{p} - \frac{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(Y_i{}^2 - Y_i^3)}{1-p} = 0,
\end{aligned}
$$

Ceci donne le résultat.

2 Pour obtenir les estimateurs de maximum de vraisemblance, nous annulons les dérivées partielles ce qui donne : notant $\overline{Y_\cdot^j} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i^j$, la moyenne empirique,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L_n(Y,\theta)}{\partial \gamma} = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \hat{\gamma} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} Y_i^1} \Longrightarrow \hat{\gamma} = \frac{1}{\overline{Y_\cdot^1}} \\
\frac{\partial L_n(Y,\theta)}{\partial \lambda} = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \hat{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i^2}{\sum_{i=1}^{n} Y_i^1} \Longrightarrow \hat{\lambda} = \frac{\overline{Y_\cdot^2}}{\overline{Y_\cdot^1}}
\end{aligned}
$$

$$\frac{\partial L_n(Y,\theta)}{\partial p} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i^3}{\sum_{i=1}^{n} Y_i^2} \Longrightarrow \hat{\lambda} = \frac{\overline{Y_.^3}}{\overline{Y_.^2}}.$$

Nous calculons maintenant la matrice des dérivées secondes, soit

$$\frac{\partial^2 L_n(y,\theta)}{\partial \theta^2} = \begin{pmatrix} -\frac{n}{\gamma^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sum_1^n y_i^2}{\lambda^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i^3}{p^2} - \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i^2 - y_i^3)}{(1-p)^2} \end{pmatrix}$$

et donc

$$\Gamma_n(\theta) = -\mathbb{E}\left(\frac{\partial^2 L_n(Y,\theta)}{\partial \theta^2}\right) = \begin{pmatrix} \frac{n}{\gamma^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{n}{\lambda\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{n\lambda}{\gamma p} + \frac{n\lambda}{\gamma(1-p)} \end{pmatrix}$$

et

$$\Gamma(\theta) = \frac{1}{n}\Gamma_n(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1\lambda}{\gamma p} + \frac{1\lambda}{\gamma(1-p)} \end{pmatrix}.$$

Nous savons de plus que

$$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \to \mathcal{N}_3(0, \Gamma^{-1}(\theta))$$

avec

$$\Gamma^{-1}(\theta) = \begin{pmatrix} \gamma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda\gamma & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\gamma p(1-p)}{\lambda} \end{pmatrix}.$$

Ce qui signifie notamment que pour n grand, nous avons $\sqrt{n}(\gamma - \hat{\gamma})/\hat{\gamma} \sim \mathcal{N}(0,1)$.
Si u_α est le quantile d'ordre $1 - \alpha/2$ d'une loi normale centrée réduite, alors

$$\mathbb{P}(-u_\alpha \leq \mathcal{N}(0,1) \leq u_\alpha) = 1 - \alpha.$$

Nous trouvons ainsi pour les intervalles de confiance :

$$\gamma \quad : \quad IC = \left[\hat{\gamma} \pm u_\alpha \frac{\hat{\gamma}}{\sqrt{n}}\right]$$

$$\lambda \quad : \quad IC = \left[\hat{\lambda} \pm u_\alpha \sqrt{\frac{\hat{\lambda}\hat{\gamma}}{n}}\right]$$

$$p \quad : \quad IC = \left[\hat{p} \pm u_\alpha \sqrt{\frac{\hat{\gamma}\hat{p}(1-\hat{p})}{\hat{\lambda}n}}\right]$$

3 Test de Wald

Il s'agit ici de $h(\theta) = \gamma - \lambda$ et $H_0 : \{\theta : h(\theta) = 0\}$.

Nous avons $h'(\theta) = (1, -1, 0)$, d'où

$$\sqrt{n}((\hat{\gamma} - \hat{\lambda}) - (\gamma - \lambda)) \to \mathcal{N}\left(0, h'(\theta)\Gamma^{-1}(\theta)^t h'(\theta)\right) \sim \mathcal{N}\left(0, \gamma^2 + \lambda\gamma\right)$$

ce qui donne la statistique de Wald :

$$W = \frac{n(\hat{\gamma} - \hat{\lambda})^2}{\hat{\gamma}^2 + \hat{\lambda}\hat{\gamma}}.$$

Sous l'hypothèse H_0, nous avons $W \to \chi^2(1)$. Pour un risque de première espèce asymptotiquement égal à α, nous rejetons H_0 si $w > F^{-1}_{\chi^2(1)}(1-\alpha)$ où w est la réalisation de la variable aléatoire W.

Test du rapport de vraisemblance

Soit L_n^0 la vraisemblance de y sous l'hypothèse H_0. Soit $\widehat{\gamma^0}$ et $\widehat{p^0}$ les estimateurs du maximum de vraisemblance de γ et p sous l'hypothèse H_0.

Nous avons $\dfrac{\partial L_n^0(y, \gamma, p)}{\partial \gamma} = \dfrac{n}{\gamma} - 2\displaystyle\sum_{i=1}^n y_i^1 + \dfrac{\displaystyle\sum_{i=1}^n y_i^2}{\gamma}$

et $\dfrac{\partial L_n^0(y, \gamma, p)}{\partial p} = \dfrac{\displaystyle\sum_{i=1}^n y_i^3}{p} - \dfrac{\displaystyle\sum_{i=1}^n (y_i^2 - y_i^3)}{1-p}$.

Ainsi, $\widehat{\gamma_0} = \frac{1+\overline{Y_.^2}}{2\overline{y_.^1}} = \frac{\hat{\gamma}+\hat{\lambda}}{2}$ et $\widehat{p_0} = \hat{p}$.

La statistique du rapport de vraisemblance est alors :

$$R \;=\; 2\left(L_n(Y, \hat{\theta}) - L_n^0\left(Y, \widehat{\gamma^0}, \widehat{p^0}\right)\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\left(n\log\left(\frac{2\hat{\gamma}}{\hat{\gamma}+\hat{\lambda}}\right)+\log\left(\frac{2\hat{\lambda}}{\hat{\gamma}+\hat{\lambda}}\right)\sum_{i=1}^{n}Y_i^2\right)\\
&= 2n\left(\log\left(\frac{2\hat{\gamma}}{\hat{\gamma}+\hat{\lambda}}\right)+\frac{\hat{\lambda}}{\hat{\gamma}}\log\left(\frac{2\hat{\lambda}}{\hat{\gamma}+\hat{\lambda}}\right)\right)
\end{aligned}
$$

Sous l'hypothèse H_0, nous avons $R \to \chi^2(1)$. Pour un risque de première espèce asymptotiquement égal à α, nous rejetons H_0 si $r > F^{-1}_{\chi^2(1)}(1-\alpha)$ où r est la réalisation de la variable aléatoire R.

Exercice 2

1 Soit $I_{X_1,\ldots,X_n}(\mu,\sigma^2)$ la matrice d'information de Fisher apporté par l'échantillon $X_1,\ldots,X-n$ sur les paramètres μ et σ^2.
Nous avons

$$
I_{X_1,\ldots,X_n}\left(\mu,\sigma^2\right) = n\begin{bmatrix} 1/\sigma^2 & 0 \\ 0 & 1/(2\sigma^4) \end{bmatrix}.
$$

2 Nous avons

$$
\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i = \overline{X}, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\hat{\mu}\right)^2.
$$

Sous l'hypothèse H_0, $\sigma^2=\mu^2$.
Après calculs nous obtenons,

$$
\tilde{\mu} = \frac{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2 + 4n\sum_{i=1}^{n}X_i^2}}{2n} - \frac{\overline{X}}{2}.
$$

En outre, sous l'hypothèse H_0, nous avons

$$
\mathbb{E}\left[\left(a\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu\right)^2\right] = na^2\mu^2+\mu^2(an-1)^2.
$$

Par conséquent sous l'hypothèse H_0, le meilleur estimateur de μ au sens de l'erreur quadratique moyenne de la forme $a\sum_{i=1}^{n}X_i$ est $\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}X_i$.

3 $H_0 : \{\sigma^2 = \mu^2\} : \{h(\mu, \sigma^2) = \mu^2 - \sigma^2 = 0$
Sous l'hypothèse H_0, $\sqrt{n}\,(\hat{\mu}^2 - \hat{\sigma}^2) \to \mathrm{N}\,(0, 4\mu^2\sigma^2 + 2\sigma^4)$.
Ainsi

$$W = \frac{n\left((\hat{\mu})^2 - \hat{\sigma}^2\right)^2}{4\hat{\mu}^2\hat{\sigma}^2 + 2\hat{\sigma}^4} \to \chi^2(1).$$

Pour un risque de première espèce asymptotiquement égal à α, le test de Wald consiste à rejeter H_0 si $w > F^{-1}_{\chi^2(1)}(1-\alpha)$ où w est la réalisation de la variable aléatoire W.

Exercice 3

Soit f la densité de $y = (y_1, \ldots, y_n)$.

Nous avons $f(y;\lambda) = \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^{y_i}}{y_i!} = e^{-n\lambda}\dfrac{\lambda^{\sum_{i=1}^n y_i}}{\prod_{i=1}^{n} y_i!}$.

Soit L_n la log-vraisemblance.

Nous avons $L_n(y;\lambda) = -\sum_{i=1}^{n}\log(y_i!) - n\lambda + \sum_{i=1}^{n} y_i \log(\lambda)$
et $\dfrac{\partial L_n(y;\lambda)}{\partial \lambda} = -n + \left(\dfrac{1}{\lambda}\right)\sum_{i=1}^{n} y_i$.

Soit $\widehat{\lambda}$ l'estimateur du maximum de vraisemblance de λ. $\widehat{\lambda}$ est tel que :
CN1 : $-n + \left(\dfrac{1}{\widehat{\lambda}}\right)\sum_{i=1}^{n} Y_i = 0 \Longleftrightarrow \widehat{\lambda} = \left(\dfrac{1}{n}\right)\sum_{i=1}^{n} Y_i = \overline{Y}$.
CN2 : Vérifiée.

Soit $I_n(\lambda)$ l'information de Fisher.

Nous avons $I_n(\lambda) = \mathbb{V}\left(\dfrac{\partial L_n(Y;\lambda)}{\partial \lambda}\right) = \dfrac{n}{\lambda}$.

Test de Wald $H_0 : \lambda = \lambda_0$

Nous avons $\sqrt{n}\left(\widehat{\lambda} - \lambda\right) \to N\left(0, \frac{n}{I_n(\lambda)}\right)$. Ainsi, $\sqrt{n}\left(\widehat{\lambda} - \lambda\right) \to N(0, \lambda)$.

Par conséquent, sous H_0, $\dfrac{n\left(\widehat{\lambda}-\lambda_0\right)^2}{\lambda_0} \to \chi^2(1)$.

Pour un risque de première espèce asymptotiquement égal à α, nous rejetons H_0 si $\dfrac{n\left(\overline{y}-\lambda_0\right)^2}{\lambda_0} > F^{-1}_{\chi^2(1)}(1-\alpha)$.

Test du rapport de vraisemblance $H_0 : \lambda = \lambda_0$

Sous H_0, nous avons $2\left(L_n\left(Y;\widehat{\lambda}\right) - L_n\left(Y;\lambda_0\right)\right) \to \chi^2(1)$.

Ainsi, $2\left(n\overline{Y}\left[\log\left(\overline{Y}\right)-\log\left(\lambda_0\right)\right] + n\left[\lambda_0 - \overline{Y}\right]\right) \to \chi^2(1)$.

Pour un risque de première espèce asymptotiquement égal à α, nous rejetons H_0 si $2\left(n\overline{y}\left[\log\left(\overline{y}\right)-\log\left(\lambda_0\right)\right] + n\left[\lambda_0 - \overline{y}\right]\right) > F^{-1}_{\chi^2(1)}(1-\alpha)$.

Test du score $H_0 : \lambda = \lambda_0$

Nous maximisons L_n par rapport à λ sous la contrainte $\lambda = \lambda_0$. Soit α le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte $\lambda = \lambda_0$.

Le lagrangien K est
$K(\lambda,\alpha) = -\sum_{i=1}^{n}\log\left(y_i!\right) - n\lambda + \sum_{i=1}^{n} y_i\log(\lambda) + \alpha\left(\lambda-\lambda_0\right)$.
CKT : $-n + \left(\dfrac{1}{\widehat{\lambda}}\right)\sum_{i=1}^{n} Y_i + \widehat{\alpha} = 0$ et $\widehat{\lambda} = \lambda_0$.
D'où, $\widehat{\lambda} = \lambda_0$ et $\widehat{\alpha} = n - \left(\dfrac{1}{\lambda_0}\right)\sum_{i=1}^{n} Y_i$.
CN2 : Vérifiée.

Sous H_0, nous avons $\frac{n}{nI_n(\lambda_0)}\left(n - \frac{n\overline{Y}}{\lambda_0}\right)^2 \to \chi^2(1)$.

D'où, sous H_0, $\frac{n\left(\overline{Y}-\lambda_0\right)^2}{\lambda_0} \to \chi^2(1)$.

Pour un risque de première espèce asymptotiquement égal à α, nous rejetons H_0 si $\frac{n(\overline{y}-\lambda_0)^2}{\lambda_0} > F^{-1}_{\chi^2(1)}(1-\alpha)$.

Le test du score est, dans ce cas, équivalent au test de Wald.

Exercice 4

Posons $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$.

Soit f la densité de (x, y).

Nous avons $f(x, y; \lambda, \mu) = e^{-n(\lambda+\mu)} \dfrac{\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i} \mu^{\sum_{i=1}^n y_i}}{\displaystyle\prod_{i=1}^n x_i! y_i!}$.

Soit L_n la log-vraisemblance.

Nous avons :
$L_n(x, y; \lambda, \mu) = -n(\lambda + \mu) + \log(\lambda) \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i + \log(\mu) \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n \log(x_i! y_i!)$

Soit $\left(\widehat{\lambda}, \widehat{\mu}\right)$ l'estimateur du maximum de vraisemblance de (λ, μ).
$\left(\widehat{\lambda}, \widehat{\mu}\right)$ est tel que :

CN1 : $-n + \dfrac{\sum_{i=1}^n X_i}{\widehat{\lambda}} = 0$ et $-n + \dfrac{\sum_{i=1}^n Y_i}{\widehat{\mu}} = 0$.
D'où, $\widehat{\lambda} = \overline{X}$ et $\widehat{\mu} = \overline{Y}$.

CN2 : Vérifiée.

Soit $I_n(\lambda, \mu)$ la matrice d'information de Fisher.

Nous avons $I_n(\lambda, \mu) = \begin{bmatrix} \frac{n}{\lambda} & 0 \\ 0 & \frac{n}{\mu} \end{bmatrix}$.

Test de Wald $H_0 : \{\lambda = \mu\} : \{h(\lambda, \mu) = \lambda - \mu = 0\}$

Nous avons $\sqrt{n}\left[(\widehat{\lambda} - \widehat{\mu}) - (\lambda - \mu)\right] \to N(0, \lambda + \mu)$.
D'où, sous H_0, $\dfrac{n\left(\overline{X} - \overline{Y}\right)^2}{\overline{X} + \overline{Y}} \to \chi^2(1)$.
Pour un risque de première espèce asymptotiquement égal à α, nous rejetons H_0 si $\dfrac{n\left(\overline{x} - \overline{y}\right)^2}{\overline{x} + \overline{y}} > F^{-1}_{\chi^2(1)}(1 - \alpha)$.

Exercice 5

1 Calcul de l'espérance

$$\mathbb{E}_\beta(X_i) = \int_0^\beta x\frac{(\alpha+1)x^\alpha}{\beta^{\alpha+1}}dx = \frac{\alpha+1}{\alpha+2}\ \beta.$$

d'où $\mathbb{E}\left(\frac{\alpha+2}{\alpha+1}\sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n}\right) = \beta$, et on en déduit ainsi l'estimateur empirique sans biais de β

$$\hat{\beta} = \frac{\alpha+2}{\alpha+1}\sum_1^n \frac{X_i}{n}.$$

2 On utilise le théorème de factorisation de Neyman-Fisher : une CNS pour que la statistique S soit exhaustive est que la densité s'écrive $f_\beta(x) = g_\beta(S(x))\ h(x)$ avec g_β et h deux fonctions mesurables.

Dans notre cas, notant $x = (x_1, ..., x_n)$

$$\begin{aligned}
f_\beta(x) &= \prod_1^n \frac{(\alpha+1)x_i^\alpha}{\beta^{\alpha+1}} 1_{]0,\beta[}(x_i) \\
&= \frac{(\alpha+1)^n}{\beta^{n(\alpha+1)}} \prod_1^n x_i^\alpha 1_{]0,\beta[}(x_i) \\
&= \frac{(\alpha+1)^n}{\beta^{n(\alpha+1)}} \prod_1^n x_i^\alpha 1_{0<\min_i(x_i)} 1_{\max_i(x_i)<\beta} \\
&= \underbrace{(\alpha+1)^n \prod_1^n x_i^\alpha 1_{0<\min_i(x_i)}}_{h(x)} \underbrace{\frac{1_{\max_i(x_i)<\beta}}{\beta^{n(\alpha+1)}}}_{g_\beta(S(x))}.
\end{aligned}$$

d'où $Y = \max(X_1, ..., X_n)$ est une statistique exhaustive pour β.

3 Calculons tout d'abord la loi de Y,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y \le y) &= \mathbb{P}(\max(X_1, ..., X_n) \le y) \\
&= \mathbb{P}(X_1 \le y, ..., X_n \le y) \\
&= \begin{cases} \mathbb{P}(X_1 \le y)^n & si\ y \in]0, \beta[\\ 0 & si\ y \le 0 \\ 1 & si\ \le y \ge \beta \end{cases}
\end{aligned}$$

or pour $y \in]0, \beta[$

$$\mathbb{P}(X_1 \leq y) = \int_0^x (\alpha+1)\frac{x^\alpha}{\beta^{\alpha+1}}dx = \frac{y^{\alpha+1}}{\beta^{\alpha+1}}$$

d'où

$$\mathbb{P}(Y \leq y) = \begin{cases} \frac{y^{n\alpha+n}}{\beta^{n\alpha+n}} & si\ y \in]0,\beta[\\ 0 & si\ y \leq 0 \\ 1 & si\ \leq y \geq \beta \end{cases}$$

ce qui permet de calculer la densité de Y

$$f_Y(y) = \frac{n\alpha+n}{\beta^{n\alpha+n}} y^{n\alpha+n-1} 1_{]0,\beta[}(y).$$

On peut ainsi calculer l'espérance de Y

$$\mathbb{E}_\beta(Y) = \frac{n\alpha+n}{n\alpha+n+1}\beta$$

et on déduit donc l'estimateur sans biais de β basé sur la statistique exhaustive Y

$$\tilde{\beta} = \frac{n\alpha+n+1}{n\alpha+n}\max(X_1, ..., X_n).$$

4 Comparons les variances de ces deux estimateurs.

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(\hat{\beta}) &= V\left(\frac{\alpha+2}{\alpha+1}\sum_1^n \frac{X_i}{n}\right) \\ &= \left(\frac{\alpha+2}{\alpha+1}\right)^2 \frac{V(X_1)}{n} \\ &= \left(\frac{\alpha+2}{\alpha+1}\right)^2 \frac{\beta^2}{n}\left(\frac{\alpha+1}{\alpha+3} - \left(\frac{\alpha+1}{\alpha+2}\right)^2\right) \\ &= \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+3)}\frac{\beta^2}{n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(\tilde{\beta}) &= \left(\frac{n\alpha+n+1}{n\alpha+n}\right)^2 V(Y) \\ &= \left(\frac{n\alpha+n+1}{n\alpha+n}\right)^2 \left(\frac{n\alpha+n}{n\alpha+n+2} - \left(\frac{n\alpha+n}{n\alpha+n+1}\right)^2\right)\beta^2 \\ &= \frac{1}{(n\alpha+n)(n\alpha+n+2)}\beta^2 \end{aligned}$$

ce qui permet ainsi de vérifier que

$$V(\hat{\beta}) \geq V(\tilde{\beta}).$$

5 On dit que S est complète si et seulement si $\mathbb{E}_\beta(f(S)) = 0 \ \ \forall \beta \in \Theta \Rightarrow f = 0 \ \ \mathbb{P}_\beta - p.s. \ \ \forall \beta \in \Theta.$

$$\mathbb{E}_\beta(f(Y)) = 0 \iff \int_0^\beta f(y) y^{n\alpha+n-1} dy = 0$$

ce qui implique en dérivant des deux côtés que $\forall \beta > 0$

$$\beta^{n\alpha+n-1} f(\beta) = 0 \iff f(\beta) = 0$$

et donc Y est une statistique complète. Par le théorème de Lehmann-Scheffé, on a alors que $\tilde{\beta}$ est optimal sans biais.