Université Paris Dauphine Année 2002-2003
U.F.R. Mathématiques de la Décision
MD4 - Modèles Linéaires et généralisations

Correction T.D. 5
Modèles linéaires généralisés

Exercice 1

1 Pour tout $i \in \{1,2,3\}$, nous avons

$$Y_i = p_i + E_i$$

avec

$$p_1 = 50\beta_1 + 50\beta_2$$
$$p_2 = 40\beta_1 + 60\beta_2$$
$$p_3 = 60\beta_1 + 40\beta_2$$

où β_1 et β_2 sont des paramètres réels inconnus.

Posons $Y = (Y_1, Y_2, Y_3)$, $X = \begin{bmatrix} 50 & 50 \\ 40 & 60 \\ 60 & 40 \end{bmatrix}$, $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ et $E = (E_1, E_2, E_3)$.

Nous avons alors

$$Y = X\beta + E.$$

2 Nous avons $X'X = \begin{bmatrix} 7700 & 7300 \\ 7300 & 7700 \end{bmatrix}$
et donc $(X'X)^{-1} = \left(\frac{1}{6\times 10^{-4}}\right) \begin{bmatrix} 77 & -73 \\ -73 & 77 \end{bmatrix}$.

Soit $\widehat{\beta}$ l'estimateur des moindres carrés de β.

$$\widehat{\beta} = (X'X)^{-1} X'Y = \left(\frac{1}{600}\right) \begin{bmatrix} 2Y_1 - 13Y_2 + 17Y_3 \\ 2Y_1 + 17Y_2 - 13Y_3 \end{bmatrix}.$$

Exercice 2

1 Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $Y_i \sim N(\mu_i, \sigma^2)$.
Nous avons

$$\begin{aligned} f(y_i, \mu_i) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(y_i - \mu_i)^2}{2\sigma^2}\right) \\ &= \exp\left(-\frac{\mu_i^2}{2\sigma^2}\right) \exp\left(-\frac{y_i^2}{2\sigma^2} - \frac{\ln(2\pi\sigma^2)}{2}\right) \exp\left(y_i \frac{\mu_i}{\sigma^2}\right). \end{aligned}$$

La paramètre de dispersion est $\phi = \sigma^2$ et le paramètre naturel est $\theta_i = \mu_i = \mathbb{E}(Y_i)$.

Par conséquent, la fonction de lien canonique est donc la fonction identité.

Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $Y_i \sim \mathcal{B}(\pi_i)$.
Nous avons

$$f(y_i, \pi_i) = \pi_i^{y_i} (1 - \pi_i)^{1 - y_i} = (1 - \pi_i) \exp\left(y_i \ln\left(\frac{\pi_i}{1 - \pi_i}\right)\right).$$

La paramètre naturel est $\theta_i = \ln\left(\frac{\pi_i}{1-\pi_i}\right)$.

Cette relation définit la fonction "logit" pour fonction de lien canonique associée à ce modèle.

Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $Y_i \sim \mathcal{P}(\lambda_i)$.
Nous avons

$$f(y_i, \lambda_i) = \lambda_i^{y_i} \frac{\exp(-\lambda_i)}{y_i!} = \exp(-\lambda_i) \exp(y_i \ln(\lambda_i)).$$

Le paramètre naturel est $\theta_i = \ln(\lambda_i)$ définissant comme lien canonique le "logarithme".

2 Notons l_i la contribution de la n ième observation à la log-vraisemblance. Nous avons $l_i\left(y_i;\theta_i,\phi\right)=\dfrac{y_i\theta_i-v\left(\theta_i\right)}{\phi}+w\left(y_i,\phi\right)$ et

$$\begin{aligned}\frac{\delta l_i}{\delta\theta_i} &= \frac{\left[y_i-v'\left(\theta_i\right)\right]}{u(\phi)}\\ \frac{\delta^2 l_i}{\delta\theta_i^2} &= \frac{-v''\left(\theta_i\right)}{u(\phi)}.\end{aligned}$$

Par ailleurs, $\mathbb{E}\left(\dfrac{\delta l_i}{\delta\theta_i}\right)=0$ et donc $\mathbb{E}\left(Y_i\right)=v'\left(\theta_i\right)$.

Aussi, $-\mathbb{E}\left(\dfrac{\delta^2 l_i}{\delta\theta_i^2}\right)=\left[\mathbb{E}\left(\dfrac{\delta l_i}{\delta\theta_i}\right)\right]^2$ et donc $\mathbb{V}\left(Y_i\right)=v''\left(\theta_i\right)u(\phi)$.

3 Pour n observations indépendantes, en tenant compte que θ dépend de β, la log-vraisemblance s'écrit

$$L(\beta)=\sum_{i=1}^{n} l_i\left(y_i;\theta_i,\phi\right).$$

Nous avons

$$\frac{\delta l_i}{\delta\beta_j}=\frac{\delta l_i}{\delta\theta_i}\frac{\delta\theta_i}{\delta\mu_i}\frac{\delta\mu_i}{\delta\eta_i}\frac{\delta\eta_i}{\delta\beta_j}.$$

Aussi,

$$\begin{aligned}\frac{\delta l_i}{\delta\theta_i} &= \frac{\left(y_i-\mu_i\right)}{u(\phi)},\\ \frac{\delta\mu_i}{\delta\theta_i} &= \frac{\mathbb{V}\left(Y_i\right)}{u(\phi)},\\ \frac{\delta\eta_i}{\delta\beta_j} &= x_{ij},\\ \frac{\delta\mu_i}{\delta\eta_i} & \quad \text{dépend de la fonction de lien.}\end{aligned}$$

Les équations de vraisemblance sont alors :

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(y_i-\mu_i\right)x_{ij}}{\mathbb{V}\left(Y_i\right)}\frac{\delta\mu_i}{\delta\eta_i}=0,\quad \forall j\in\{1,\ldots,p\}.$$

Lorsque la fonction de lien est la fonction de lien canonique, nous avons

$$\frac{\delta \mu_i}{\delta \eta_i} = v''(\theta_i).$$

Les équations de vraisemblances sont alors :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i - \mu_i)}{u(\phi)} x_{ij} = 0, \quad \forall j \in \{1, \ldots, p\}.$$

4 Nous supposons que $Y_i \sim \mathcal{B}(\pi_i)$. Nous avons $\mu_i = \pi_i = \dfrac{\exp(x_i'\beta)}{1 + \exp(x_i'\beta)}$.
Les équations de vraisemblances sont alors :

$$\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \frac{\exp(x_i'\beta)}{1 + \exp(x_i'\beta)} \right) x_{ij} = 0, \quad \forall j \in \{1, \ldots, p\}.$$

Exercice 3

1 Nous avons

$$L(y_1, \ldots, y_8; \beta_0, \beta_1) =$$

$$\sum_{i=1}^{8} y_i (\beta_0 + \beta_1 x_i) - \sum_{i=1}^{8} n_i \ln(1 + \exp(\beta_0 + \beta_1 x_i)) + \sum_{i=1}^{8} \ln\left(C_{n_i}^{y_i}\right).$$

2 Les équations de vraisemblance sont :

$$\frac{\delta L}{\delta \beta_0} = \sum_{i=1}^{8} y_i - \sum_{i=1}^{8} n_i \frac{\exp(\beta_0 + \beta_1 x_i)}{1 + \exp(\beta_0 + \beta_1 x_i)} = 0,$$

$$\frac{\delta L}{\delta \beta_1} = \sum_{i=1}^{8} x_i y_i - \sum_{i=1}^{8} n_i x_i \frac{\exp(\beta_0 + \beta_1 x_i)}{1 + \exp(\beta_0 + \beta_1 x_i)} = 0.$$

Elles sont très difficiles à manipuler et nous ne pouvons pas mettre en évidence les expressions analytiques des estimateurs du maximum de vraisemblance.

3 Nous avons :

$$\begin{aligned}
\frac{\delta^2 L}{\delta \beta_0^2} &= -\sum_{i=1}^{8} n_i \frac{\exp\left(\beta_0+\beta_1 x_i\right)\left(1+\exp\left(\beta_0+\beta_1 x_i\right)\right)-\left(\exp\left(\beta_0+\beta_1 x_i\right)\right)^2}{\left(1+\exp\left(\beta_0+\beta_1 x_i\right)\right)^2} \\
&= -\sum_{i=1}^{8} n_i \frac{\exp\left(\beta_0+\beta_1 x_i\right)}{\left(1+\exp\left(\beta_0+\beta_1 x_i\right)\right)^2} \\
&= -\sum_{i=1}^{8} n_i \pi_i \left(1-\pi_i\right), \\
\frac{\delta^2 L}{\delta \beta_0 \delta \beta_1} &= -\sum_{i=1}^{8} n_i x_i \pi_i \left(1-\pi_i\right), \\
\frac{\delta^2 L}{\delta \beta_1^2} &= -\sum_{i=1}^{8} n_i x_i^2 \pi_i \left(1-\pi_i\right).
\end{aligned}$$