Université Paris-Dauphine Année 2011-2012
Département de Mathématique

Partiel NOISE, sujet A

Résoudre deux et uniquement deux exercices au choix.

Exercice 1
On considère la loi $\Gamma(5,1)$ tronquée en a, de densité

$$g(x) \propto x^4 e^{-x} \mathbb{I}_{[a,\infty[}(x).$$

On souhaite générer des réalisations de cette loi.

1. Proposer un algorithme de rejet pour générer selon cette loi. Quel est son taux d'acceptation ?
2. Soit $U \sim \mathcal{U}([0,1])$ et soit F la fonction de répartition de la loi $\Gamma(5,1)$ (non tronquée). On pose $Z = F^{-1}(F(a) + (1 - F(a))U)$. Montrer que la densité de Z est g.
3. Utiliser cette seconde méthode pour générer selon la densité g. Comparer les deux méthodes.
4. Utiliser un code R pour calculer l'intégrale $\int_a^\infty x^4 e^{-x} dx$. Proposer une méthode de Monte-Carlo pour calculer une valeur approchée de cette intégrale.

Exercice 2
On souhaite estimer la constante

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

On considère une suite infinie de variables aléatoires $U_1, U_2, \ldots, U_i \ldots$ de loi $\mathcal{U}_{[0,1]}$ et la variable aléatoire K qui indique la première réalisation qui dépasse la réalisation qui la précède, c'est à dire

$$K = \min_{\{k \geq 2\}} \{k : \; U_k \geq U_{k-1}\}.$$

On observe que $P(K = k) = \frac{k-1}{k!}$ car $P(K > k) = P(U_1 \geq U_2 \geq U_3 \geq \cdots \geq U_k) = \frac{1}{k!}$ et donc

$$E[K] = \sum_{k=2}^{\infty} k \, \frac{k-1}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e.$$

1. Ecrire une fonction qui simule n réalisations de la variable k.
2. Pour $n = 10^3$ donner une estimation par Monte-Carlo de e et la comparer à sa valeur théorique.
3. Donner une estimation de l'intervalle de confiance de niveau $1 - \alpha$ avec $\alpha = 0.05$.
4. Vérifier graphiquement la convergence de l'estimateur vers sa valeur théorique. Tracer sur le même graphique l'évolution de l'intervalle de confiance.

Exercice 3
On cherche à approcher l'intégrale

$$\int_{\mathbf{R}^-} \frac{2 + \sin^4(x/6)}{(1 + x^2)^{3/2}} \mathrm{d}x$$

à l'aide de la méthode de Monte-Carlo.

a. Donner une méthode d'acceptation rejet permettant de simuler une variable aléatoire dont la densité est proportionnelle à $\frac{2+\sin^4(x/6)}{(1+x^2)^{3/2}}$.

b. Illustrer à l'aide d'un histogramme sur 10^4 simulations et d'une courbe la pertinence de votre algorithme de génération.

c. Déduire du taux d'acceptation de l'algorithme une valeur approchée de l'intégrale, en précisant l'erreur statistique de cette approximation (pour une confiance de 95%).

Exercice 4

On considère la variable aléatoire X de densité

$$f(x) = C\, e^{-x(\log(x))^2} \mathbb{I}_{\mathbb{R}_+}(x).$$

1. Écrire un algorithme d'acceptation-rejet permettant de simuler des réalisations de X.
2. Quelle est la probabilité d'acceptation de votre algorithme d'acceptation-rejet ?
3. En déduire une expérience de Monte-Carlo permettant d'estimer la valeur de la constante C et l'erreur statistique de cette approximation.

Exercice 5

On tire un entier k au hasard, uniformément entre 1 et n. On sait que la probabilité de l'événement "k est divisible par un carré parfait" vaut approximativement $6/\pi^2$ (cette probabilité tend vers $6/\pi^2$ quand n tend vers l'infini).

Utiliser cette propriété pour calculer en R une approximation de π. Observer l'influence de la valeur de n.

On rappelle que l'instruction `a%%b` calcule a *mod* b, le reste dans la division de a par b.

Exercice 6

Considérons une variable aléatoire X de densité

$$f(x) = 4x^3 \exp(-x^4),\ x \in \mathbb{R}_+.$$

1. Donner la fonction de répartition F de X.
2. Simuler $n = 10^3$ variables indépendantes de F (iid de F).
3. Calculer les quantiles $q_1 = F^{-1}(0.075)$ et $q_2 = F^{-1}(0.9)$.
4. Calculer les valeurs d'estimateurs $\hat{q}_{n,1}$ de q_1 et $\hat{q}_{n,2}$ de q_2 à partir de l'échantillon de taille n simulé à la question 2. Donner une évaluation de la précision de ces estimations.