

## Examen de contrôle continu

### 07/05/2003

Durée une heure trente minutes, Aucun document n'est autorisé, Trois exercices indépendants, Seules les réponses soigneusement justifiées seront prises en compte.

**Exercice 1 (8 pts)** Nous considérons un couple  $(X, Y)$  de variables aléatoires continues réelles de densité de probabilité ( $a > 0$ ) :

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} \frac{3y}{a^3} & \text{si } x + y < a, \quad y - x < a, \quad y > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

- 1 (1 pt) Calculer  $\mathbb{E}(XY)$ .
- 2 (2 pts) Déterminer les lois marginales de  $X$  et de  $Y$ .
- 3 (1 pt) Calculer  $\text{cov}(X, Y)$ .
- 4 (2 pts) Déterminer la loi conditionnelle de  $Y$  sachant que  $X = x$ .
- 5 (2 pts) Calculer  $\mathbb{E}(Y|X)$ .

**Exercice 2 (6 pts)**

- 1 (2 pts) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $a \in \mathbb{R}_+^*$ , calculer

$$I(n, a) = \int_0^\infty x^n \exp(-ax) dx.$$

**2 (2 pts)** La durée de vie des individus d'une espèce d'insectes est une variable aléatoire  $X$  dont la densité de probabilité est :

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda x^2 \exp(-ax) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

Calculer  $\lambda$  en fonction de  $a$ . Sachant que l'unité de temps est l'heure et que l'espérance de vie de ces insectes est de 200 heures, calculer  $a$ .

**3 (2 pts)** Nous considérons un couple  $(X, Y)$  de variables aléatoires continues réelles de densité de probabilité :

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \frac{\alpha}{(1 + x^2 + y^2)^{3/2}} .$$

Calculer  $\alpha$ . Soit  $Z = X/\sqrt{1 + Y^2}$ . Donner la densité du couple  $(Y, Z)$ .

**Exercice 3 (6 pts)** Nous considérons un couple gaussien  $(X, Y)$  dont la densité est de la forme :

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \alpha \exp \left( -1/2 (x^2 - xy + y^2) \right) .$$

**1 (2 pts)** En remarquant que  $x^2 - xy + y^2 = (y - x/2)^2 + 3x^2/4$ , calculer la densité marginale de  $X$ . En déduire la densité marginale de  $Y$ .

**2 (2 pts)** Déterminer la densité conditionnelle de  $Y$  sachant  $X = x$ . En déduire  $\mathbb{E}(Y|X)$ .

**3 (2 pts)** Évaluer la constante  $\alpha$  et le coefficient de corrélation linéaire entre  $X$  et  $Y$ .