Université Paris Dauphine
DEMI2E 2e année
Algèbre linéaire 3

Contrôle continu - 5 décembre 2011

Le sujet comporte 1 page. L'épreuve dure 1 heure 30. Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits.

Exercice 1. Soit E l'espace vectoriel des polynômes à cœfficients réels de degré ≤ 2 et soit f l'application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(P,Q) = P(0)\,Q(0) + P(1)\,Q(1) + P(2)\,Q(2).$$

1. Montrer que f définit un produit scalaire sur E.
2. Soit $F = \{P \in E;\ P(0) = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et donner une base de F.
3. Déterminer par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt, une base orthonormale de F relativement au produit scalaire f.
4. Déterminer la dimension et une base de l'orthogonal $F^{\perp}$ de F.

Exercice 2. Soit E l'espace $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique et

$$F = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in E,\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0,\ x_2 + x_3 = 0\}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. Déterminer la dimension, une base de F puis une base orthonormale $\{f_1, f_2\}$ de F.
3. Déterminer la dimension et une base de $F^{\perp}$, puis une base orthonormale $\{f_3, f_4\}$ de $F^{\perp}$.
4. Soit p_F la projection orthogonale de E sur F. Déterminer la matrice B de p_F dans la base $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ de E. En déduire la matrice A de p_F dans la base canonique $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ de E.

Exercice 3. Soit a, b, $c \in \mathbb{R}$ et A la matrice de $M_3(\mathbb{R})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

1. Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes :
(1.1) A appartient au groupe orthogonal $O(3)$,
(1.2) $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ et $ab + bc + ca = 0$,
(1.3) $|a + b + c| = 1$ et $ab + bc + ca = 0$.
2. Calculer $\det A$. En déduire que les deux propositions suivantes sont équivalentes :
(2.1) A appartient au groupe spécial orthogonal $SO(3)$,
(2.2) $a + b + c = 1$ et $ab + bc + ca = 0$.
3. Montrer que le polynôme $X^3 - X^2 + k$, avec k réel, admet trois zéros réels si et seulement si $k \in [0, \frac{4}{27}]$.
En déduire que les deux propositions suivantes sont équivalentes :
(3.1) $A \in SO(3)$,
(3.2) il existe $k \in [0, \frac{4}{27}]$ tel que a, b et c soient les zéros du polynôme $X^3 - X^2 + k$.

Corrigé

Exercice 1.

1. L'application f est

- bilinéaire : en effet d'après la distributivité de l'addition par rapport à la multiplication et l'associativité de la multiplication dans $\mathbb{R}$, on a pour P, $Q \in E$ et $i = 0,\ 1,\ 2$

$$(\lambda_1 P_1(i) + \lambda_1 P(i))\, Q(i) = (\lambda_1 P_1(i))\, Q(i) + (\lambda_2 P_2(i))\, Q(i) = \lambda_1 (P_1(i)\, Q(i)) + \lambda_2 (P_2(i)\, Q(i))$$

d'où l'on déduit la linéarité par rapport à la première variable

$$f(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2, Q) = \lambda_1 f(P_1, Q) + \lambda_2 f(P_2, Q)$$

et de même pour la seconde variable,

- symétrique : en effet d'après la commutativité de la multiplication dans $\mathbb{R}$, on a pour P, $Q \in E$ et $i = 0,\ 1,\ 2$

$$P(i)\, Q(i) = Q(i)\, P(i)$$

d'où l'on déduit

$$f(P, Q) = f(Q, P),$$

- positive : en effet pour $P \in E$

$$f(P, P) = P(0)^2 + P(1)^2 + P(2)^2 \geq 0,$$

- définie : en effet soit $P \in E$ tel que $f(P, P) = 0$, c'est-à-dire $P(0)^2 + P(1)^2 + P(2)^2 = 0$, soit $P(0) = P(1) = P(2) = 0$ (puisque $P(0)$, $P(1)$ et $P(2)$ sont des réels) ; ainsi P est un polynôme de degré ≤ 2 avec 3 zéros distincts, donc est le polynôme nul.

En conclusion f est une forme bilinéaire, symétrique, positive et définie, c'est donc un produit scalaire sur E.

2. L'application $P \to P(0) : E \to \mathbb{R}$ étant linéaire, son noyau F est un sous-espace vectoriel de E.

Sur la base canonique $(1, X, X^2)$ de E un polynôme P de E s'écrit

$$P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2.$$

Il appartient à F si et seulement si $a_0 = 0$, donc si et seulement si il s'écrit

$$P = a_1 X + a_2 X^2.$$

Ainsi F est engendré par la famille (X, X^2) et comme cette famille est libre, elle forme une base de F.

3. On part de la base (X, X^2) de F.

On pose d'abord $P_1 = \dfrac{X}{\|X\|}$ et comme $\|X\|^2 = f(X, X) = 0.0 + 1.1 + 2.2 = 5$, on a

$$P_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} X\cdot$$

On pose ensuite $P_2 = \dfrac{Q_2}{\|Q_2\|}$ avec $Q_2 = X^2 - f(X^2, P_1) P_1$.

Or

$$f(X^2,P_1)=f(X^2,\frac{1}{\sqrt{5}}X)=\frac{1}{\sqrt{5}}f(X^2,X)=\frac{1}{\sqrt{5}}(0.0+1.1+2^2.2)=\frac{9}{\sqrt{5}}$$

donc

$$Q_2=X^2-\frac{9}{5}X \qquad \text{et} \qquad \|Q_2\|^2=f(Q_2,Q_2)=\frac{4}{5}\cdot$$

Ainsi

$$P_2=\frac{\sqrt{5}}{2}(X^2-\frac{9}{5}X)$$

et la famille (P_1,P_2) forme une base orthonormale de F pour le produit scalaire f.

4. Comme F et son orthogonal forment une somme directe de E, on a

$$\dim F^{\perp}=\dim\, E-\dim\, F=3-2=1.$$

Une base de $F^{\perp}$ est donc formée par un polynôme P de degré ≤ 2, non nul et orthogonal à X et à X^2.

Or $f(P,X)=P(1)+2P(2)$ et $f(P,X^2)=P(1)+4P(2)$, donc $f(P,X)=f(P,X^2)=0$ si et seulement si $P(1)+2P(2)=P(1)+4P(2)=0$, soit si et seulement si $P(1)=P(2)=0$.

Le polynôme P doit donc admettre (au moins) 1 et 2 comme racines et de plus être de degré ≤ 2. Par conséquent $P=(X-1)(X-2)$ (à une constante multiplicative près).

Ainsi le sous-espace $F^{\perp}$ est de dimension 1 et est engendré par le vecteur $P=(X-1)(X-2)$.

Exercice 2.

1. L'application f de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1+2x_2+x_3+x_4,x_2+x_3)$$

est linéaire. Comme F est le noyau de cette application, ce sous-ensemble F est donc un sous-espace vectoriel de E.

2. La matrice A de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^4$ et de $\mathbb{R}^2$ est donnée par

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Comme $Im\, f$ est engendrée par les vecteurs colonnes de cette matrice et comme par exemple on note que les deux premiers vecteurs colonnes sont indépendants, on en déduit que dim $F\geq 2$. Or comme $Im\, f$ est un sous-espace vectoriel de l'espace d'arrivée $\mathbb{R}^2$ qui est de dimension 2, alors dim $Im\, f\leq 2$. En résumé dim $Im\, f=2$.

Par le théorème du rang, on a alors dim $Ker\, f=\dim\, E-\dim\, Im\, f=4-2=2$ et ainsi

$$\dim\, F=2.$$

Une base de F est constituée de 2 vecteurs u_1 et u_2 linéairement indépendants de F On peut les choisir de sorte que leurs composantes soient échelonnées. Par exemple les vecteurs

$$u_1=(1,0,0,-1) \qquad \text{et} \qquad u_2=(0,1,-1,-1)$$

appartiennent à F et sont linéairement indépendants. Ils forment donc une base de F.

On orthonormalise ensuite cette famille par le procédé de Schmidt. En notant $< \cdot, \cdot >$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^4$ et $\| \cdot \|$ la norme associée, d'une part on pose

$$f_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} u_1$$

et d'autre part

$$f_2 = \frac{u_2 - < u_2, f_1 > f_1}{\|u_2 - < u_2, f_1 > f_1\|} = \frac{u_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} f_1}{\|u_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} f_1\|} = \frac{u_2 - \frac{1}{2} u_1}{\|u_2 - \frac{1}{2} u_1\|}$$

Ainsi la famille $\{f_1, f_2\}$ avec

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, -1) \qquad \text{et} \qquad f_2 = \sqrt{\frac{2}{5}}(-\frac{1}{2}, 1, -1, -\frac{1}{2})$$

forment donc une base orthonormale de F.

3.- Comme E est somme directe de F et de son orthogonal, on a donc dim $F^{\perp} =$ dim $E -$ dim $F = 4 - 2$, et ainsi

$$\dim F^{\perp} = 2.$$

Une base de $F^{\perp}$ est constituée de 2 vecteurs u_3 et u_4 linéairement indépendants et orthogonaux à u_1 et u_2. Par exemple les vecteurs

$$u_3 = (1, 0, -1, 1) \qquad \text{et} \qquad u_4 = (0, 1, 1, 0)$$

forment ainsi une base de $F^{\perp}$.

On orthonormalise ensuite cette famille par le procédé de Schmidt. Ainsi la famille $\{f_3, f_4\}$ avec

$$f_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 0, -1, 1) \qquad \text{et} \qquad f_4 = \sqrt{\frac{1}{15}}(1, 3, 2, 1)$$

forment une base orthonormale de $F^{\perp}$.

4. Soit A la matrice représentative de p_F dans la base canonique orthonormale $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ de E et B la matrice représentative de p_F dans la nouvelle base orthonormale $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ de E.

Si P est la matrice de passage de la base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ de E à la nouvelle base $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ de E on a

$$A = PBP^{-1}$$

soit aussi

$$A = P\,B\,{}^tP$$

car P est orthogonale, c'est-à-dire $P^{-1} = {}^tP$ puisqu'elle elle définit un changement de bases orthonormales. De plus la k-ième colonne de P est formée des coordonnées du vecteur f_k

dans la base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Cette matrice P est donc donnée par

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{5}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{15}} \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{5}} & 0 & \frac{3}{\sqrt{15}} \\ 0 & -\sqrt{\frac{2}{5}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{15}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{5}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{15}} \end{bmatrix}$$

Or p_F est l'application identité sur le sous-espace F et l'application nulle sur le sous-espace $F^\perp$. La matrice représentative B de p_F dans la base (f_1, f_2, f_3, f_4) de E est donc

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On en déduit alors que A est donnée par

$$A = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Exercice 3.

1. Une matrice A appartient au groupe orthogonal $O(3)$ si et seulement si ses vecteurs colonnes C_1, C_2 et C_3 sont unitaires et deux à deux orthogonaux pour le produit scalaire usuel $< \cdot, \cdot >$ de $\mathbb{R}^3$.

Comme pour $1 \leq i \neq j \leq 3$

$$< C_i, C_i >= a^2 + b^2 + c^2 \qquad \text{et} \qquad < C_i, C_j >= ab + bc + ca$$

on en déduit donc l'équivalence de (1.1) et (1.2).

Comme de plus

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$$

on en déduit donc l'équivalence de (1.2) et (1.3).

2- En ajoutant les deuxième et troisième colonnes à la première colonne du déterminant, puis en factorisant on a

$$\det A = (a + b + c) \det \begin{bmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & b \\ 1 & c & a \end{bmatrix}$$

puis en retranchant la première ligne aux deuxième et troisième lignes on a

$$\det A = (a + b + c) \det \begin{bmatrix} 1 & b & c \\ 0 & a - b & b - c \\ 0 & c - b & a - c \end{bmatrix}$$

d'où

$$\det A = (a+b+c)\big((a-b)(a-c)+(b-c)^2\big) = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)).$$

Une matrice A appartient au groupe spécial orthogonal $SO(3)$ si et seulement si A appartient au groupe orthogonal $O(3)$ et $\det A = 1$.

Ainsi, si $A \in SO(3)$, alors $A \in O(3)$ et donc $ab+bc+ca = 0$ d'après la question 1, et de plus $1 = detA = (a+b+c)^3$, soit $a+b+c = 1$.

Inversement, si $ab+bc+ca = 0$ et $a+b+c = 1$, alors $A \in O(3)$ d'après la question 1, et de plus $detA = (a+b+c)^3 = 1$ d'après le calcul précédent : ainsi $A \in SO(3)$.

3. Soit f la fonction définie dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - x^2 + k$ avec k réel. Cette fonction est dérivable dans $\mathbb{R}$ avec $f'(x) = x(3x-2)$. Donc f est croissante sur $]-\infty, 0]$, décroissante sur $[0, 2/3]$ et croissante sur $[2/3, +\infty[$. Compte-tenu de ces variations, la fonction f s'annule trois fois dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $f(0) \geq 0$ et $f(2/3) \leq 0$, c'est-à-dire $k \geq 0$ et $k \leq 4/27$.

Les nombres a, b et c sont les zéros du polynôme $X^3 - X^2 + k$ si et seulement si $X^3 - X^2 + k = (X-a)(X-b)(X-c)$, soit en identifiant les cœfficients, si et seulement si

$$a+b+c = 1 \qquad ab+bc+ca = 0 \qquad abc = -k.$$

De plus le polynôme $X^3 - X^2 + k$ admet trois zéros réels si et seulement si $0 \leq k \leq 4/27$ d'après ce qui précède.

Ainsi si $A \in SO(3)$, alors a, b et c vérifient $a+b+c = 1$ et $ab+bc+ca = 0$ d'après (2.2), donc sont les trois zéros réels d'un polynôme du type $X^3 - X^2 + k$ avec $k = -abc \in [0, 4/27]$.

Inversement si $0 \leq k \leq 4/27$, le polynôme $X^3 - X^2 + k$ admet trois zéros réels ; si ces zéros sont a, b et c, ils vérifient alors $a+b+c = 1$ et $ab+bc+ca = 0$, et donc la matrice A associée appartient à $SO(3)$.

On a donc l'équivalence de (3.1) et (3.2).