Université Paris Dauphine
DU MI2E
Algèbre linéaire 3

Contrôle continu, lundi 3 janvier 2011.
Durée : 1h30.

Tous *les appareils électroniques et les documents sont interdits. Les solutions devront être rédigées de manière rigoureuse. Lorsque des résultats du cours seront invoqués, ils devront clairement être énoncés.*

1. Questions de cours.

1. Définir le groupe orthogonal.
2. Donner l'expression analytique de la projection sur un sous-espace vectoriel dont on connaît une base orthonormée $\mathcal{B} = \{f_1, \ldots, f_k\}$.
3. Montrer que si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur l'espace vectoriel réel E, alors $N : x \mapsto \sqrt{\langle x, x \rangle}$ définit une norme sur E.
4. Montrer qu'étant donnée une forme quadratique q sur un $\mathbf{R}$-espace vectoriel E, il existe une unique forme bilinéaire symétrique s sur E telle que q soit la forme quadratique associée à s.

2. Exercice.

On se place dans un espace euclidien E muni d'une base orthonormée $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Soient $u_1, \ldots, u_p$ de E. Soit $G \in \mathcal{M}_p(\mathbf{R})$ la matrice carrée définie par

$$G_{ij} = \langle u_i, u_j \rangle.$$

Soit $v_i := \sum_{j=1}^{p} \langle u_i, u_j \rangle e_j$.

1. Montrer que quels que soient les réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$, on a :

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i v_i = \sum_{j=1}^{p} \left\langle \sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i, u_j \right\rangle e_j,$$

2. On suppose que la famille $\{v_1, \ldots, v_p\}$ est libre. Montrer que la famille $\{u_1, \ldots, u_p\}$ aussi est libre.
3. Montrer que réciproquement si la famille $\{u_1, \ldots, u_p\}$ est libre, alors la famille $\{v_1, \ldots, v_p\}$ aussi est libre.
4. Montrer que G est une matrice symétrique ; soit q la forme quadratique de matrice G. Montrer que pour $x_1, \ldots, x_p \in \mathbf{R}$ et

$$\text{pour } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}, \quad \text{on a } {}^tX \cdot G \cdot X = \left\langle \sum_{i=1}^{p} x_i u_i, \sum_{j=1}^{p} x_j u_j \right\rangle.$$

En déduire que la forme quadratique q est positive.

3. Exercice.

Soit la forme quadratique sur $\mathbf{R}^3$:

$$Q(X,Y,Z) = X^2 + 2Y^2 - 7Z^2 - 4XY + 8XZ.$$

1. Ecrire la matrice de Q dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$.

2. Effectuer la réduction de Gauss sur Q. La forme Q est-elle positive ? Négative ?

4. Exercice.

Soit E un espace euclidien, F un sous-espace de E, et $\{e_1, \ldots, e_n\}$ une base orthonormée de E. Soit enfin p la projection orthogonale sur F.

1. Montrer que pour tous $x, y \in E$, on a :

$$\langle x - p(x), p(y) \rangle = \langle y - p(y), p(x) \rangle = 0.$$

2. Soit P la matrice de p dans la base $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Montrer que pour tous vecteurs colonnes X et Y on a ${}^tY \cdot P \cdot X = {}^tX \cdot P \cdot Y$. En déduire que la matrice P est symétrique.

5. Exercice.

François souhaite avoir une idée de l'évolution de sa consommation de café au cours du temps. Il compte donc sa consommation annuelle pendant 4 ans (de 2007 à 2010), et cherche à employer le critère des moindres carrés pour obtenir une relation mathématique approchée du type

$$\text{Nombre de cafés } \simeq a + b * \text{ numéro de l'année},$$

le numéro de l'année étant “année $-$ 2006”.

Numéro de l'année	1	2	3	4
Nombre de cafés	360	370	490	460

(Soit au total 1680 cafés en quatre ans.)

En partant du critère des moindres carrés, déterminer a et b. Combien François doit-il prévoir de cafés pour 2011 ?

Barême <u>indicatif</u> : 1 : 6 points,
2 : 5 points,
3 : 3 points,
4 : 3 points,
5 : 3 points.