Université Paris Dauphine
DU MI2E
Algèbre linéaire 3

Contrôle continu, mardi 8 décembre 2009.
Durée : 1h30.

Tous *les appareils électroniques et les documents sont interdits. Les solutions devront être rédigées de manière rigoureuse. Lorsque des résultats du cours seront invoqués, ils devront clairement être énoncés.*

1. Questions de cours.

1. Donner l'expression analytique de la projection sur un sous-espace vectoriel dont on connaît une base orthonormée $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_k\}$.

2. Donner la définition d'une isométrie vectorielle entre deux espaces euclidiens E et F.

3. Donner la démonstration du fait que $E = F \oplus F^\perp$ et $F = F^{\perp\perp}$ pour tout espace euclidien E et sous-espace vectoriel F.

4. Donner la démonstration du théorème de représentation du dual d'un espace euclidien.

2. Exercice.

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace vectoriel de dimension n.

1. Soient F et G des sous-espace vectoriels de E. Montrer que $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

2. Soient $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base orthonormale de E et $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0, ..., 0)\}$ et H le sous-espace vectoriel de E d'équation cartésienne $\sum_{k=1}^n a_k x_k = 0$ dans $\mathcal{B}$.

(a) Déterminer l'orthogonal de H.

(b) Déterminer la distance du vecteur $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$ de E au sous-espace vectoriel H.

3. Soit P le sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ défini par

$$u = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in P \iff x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0.$$

(a) Déterminer une base de P, puis une base de $P^\perp$ puis une base orthonormale de $P^\perp$.

(b) En déduire une expression analytique de la projection orthogonale de $\mathbb{R}^4$ sur P.

3. Exercice.

Soit f l'endormorphisme dont la matrice M dans la base canonique $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 5/6 & -1/6 & 1/3 \\ -1/6 & 5/6 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $f(e_1 + e_2 + e_3)$ ainsi que $f(e_1 - e_2)$.

2. Montrer que $\mathcal{B}' = \{e_1 + e_2 + e_3, e_1 - e_2, e_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et calculer $\mathcal{B}''$ l'orthonormalisée de $\mathcal{B}'$ (par le procédé de Gram-Schmidt).

3. Calculer P, la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}''$. Sans calcul (mais en expliquant pourquoi) expliciter P', la matrice de passage de $\mathcal{B}''$ vers $\mathcal{B}$.

4. On appelle C la matrice de f dans la base $\mathcal{B}''$. Expliciter C, et ensuite exprimer C en fonction de A et P.

4. Exercice.

Un médecin imagine que la taille des enfants doit croître, grossièrement, proportionnellement au poids des enfants. Il doit donc exister une relation mathématique du type

$$\text{Taille en cm} \simeq a + b * \text{Poids en Kg}$$

Afin de calculer a et b, le médecin mesure 10 enfants volontaires agés de 6 ans et obtient le tableau suivant :

Enfant	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Taille (en cm)	121	123	108	118	111	109	114	103	110	115
Poids (en Kg)	25	22	19	24	19	18	20	15	20	21

Le médecin, bien que peut être reconnu en pédiatrie, est malheureusement un piètre mathématicien. Il a donc calculé, en désespoir de cause et sans trop comprendre pourquoi les différentes moyennes :

$$\overline{P} = \sum_{i=1}^{10} P_i/10 = 20,3\text{Kg}, \quad \overline{T} = \sum_{i=1}^{10} T_i/10 = 113,2\text{cm}$$

$$\sigma = \sum_{i=1}^{10} \left(P_i - \overline{P}\right)^2/10 = 7,61\text{Kg}^2 \quad R = \sum_{i=1}^{10} T_i P_i/10 = 2615.1 \text{ Kg.cm}$$

Aider le médecin en donnant (et en la justifiant) une expression de a et b en fonction des différentes moyennes $\overline{P}, \overline{T}, R, \sigma$. Calculer (de manière approchée) a et b et commentez, si possible, les résultats en utilisant les ratios (approchés) suivants :

$$\frac{R}{\sigma} = 344 \quad \frac{R\overline{P}}{\sigma} = 6976 \quad \frac{\overline{T}.\overline{P}}{\sigma} = 302 \quad \frac{\overline{T}.\overline{P}^2}{\sigma} = 6130.$$

Barême <u>indicatif</u> : 1 : 6 points,
2 : 6 points,
3 : 5 points,
4 : 3 points.