

**Université Paris Dauphine
DEMI2E 2e année**

Calcul différentiel et optimisation I

Sujets d'examen 2010-2011

François BOLLEY

Contrôle continu du 9 mars 2011

Le sujet comporte **2** pages. L'épreuve dure 1 heure 30. Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits.

Questions de cours

1. Démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans \mathbb{R}^n et son cas d'égalité.
2. Donner la définition d'un ensemble borné de \mathbb{R}^n .
3. Énoncer le théorème de Weierstrass sur les fonctions continues.
4. Donner la définition d'une fonction coercive sur \mathbb{R}^n .

Exercice 1

On se place dans \mathbb{R}^n muni de la norme euclidienne $\|\cdot\|$.

1. Soit $(F_k)_k$ une suite de sous-ensembles non vides, fermés et bornés de \mathbb{R}^n et soit pour tout k

$$d_k = \sup\{\|x - y\|; x, y \in F_k\},$$

appelé diamètre de F_k .

On suppose que $F_{k+1} \subset F_k$ pour tout k et que la suite réelle $(d_k)_k$ tend vers 0.

- 1.1. (Exemple) Dans cette question uniquement on note F_k la boule fermée de centre 0 et rayon $1/k$. Calculer d_k pour tout k et déterminer $\bigcap_k F_k$.

- 1.2. Pour chaque entier k , justifier l'existence du nombre réel d_k .

- 1.3. Pour chaque entier k soit x_k un point de F_k . Montrer que la suite $(x_k)_k$ est de Cauchy.

- 1.4. En déduire que l'ensemble $\bigcap_k F_k$ est non vide.

- 1.5. Montrer que l'ensemble $\bigcap_k F_k$ est réduit à un seul point. Pour cela on pourra considérer deux points de cet ensemble et montrer qu'ils sont égaux.

2. (Exemple) Pour chaque entier k , soit F_k la boule fermée de centre 0 et rayon $1 + 1/k$ de \mathbb{R}^n . Déterminer $\bigcap_k F_k$. Pourquoi ne retrouve-t-on pas le résultat de la question 1.5?

3. (Exemple) Pour chaque entier k , soit $F_k = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_1 \geq k\}$. Montrer que les F_k sont fermés et déterminer $\bigcap_k F_k$. Pourquoi ne retrouve-t-on pas le résultat de la question 1.5?

.../...

Exercice 2

Soit f une fonction de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} . Pour tout réel t on définit son ensemble de niveau t par

$$E_t = \{x \in \mathbb{R}^n; f(x) \leq t\}.$$

1. (Exemple, $n = 2$) Déterminer les ensembles de niveau de la fonction f définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2y$. Montrer que ce sont des ensembles fermés et bornés de \mathbb{R}^2 .
2. Si f est continue sur \mathbb{R}^n , montrer que ses ensembles de niveau sont des fermés de \mathbb{R}^n .
3. Si f est continue et coercive sur \mathbb{R}^n , montrer que ses ensembles de niveau sont des fermés bornés de \mathbb{R}^n .
4. (Exemple, $n = 2$) Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par

$$f(x, y) = y^2 - x^2.$$

Déterminer l'ensemble de niveau 0 de la fonction f . La fonction f est-elle continue sur \mathbb{R}^2 ? coercive sur \mathbb{R}^2 ?

5. (Exemple, $n = 2$) Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 & \text{si } (x, y) \in B(0, 2) \\ x^2 + y^2 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $B(0, 2)$ désigne la boule ouverte de centre $(0, 0)$ et de rayon 2 dans \mathbb{R}^2 muni de la norme euclidienne. Déterminer l'ensemble de niveau 3 de la fonction f . La fonction f est-elle continue sur \mathbb{R}^2 ? coercive sur \mathbb{R}^2 ?

Corrigé

Exercice 1

1.1. Soit k fixé. D'une part, si $x, y \in F_k$, alors par inégalité triangulaire

$$\|x - y\| \leq \|x\| + \|y\| \leq \frac{2}{k}$$

et par conséquent $d_k \leq \frac{2}{k}$. D'autre part, $x = (\frac{1}{k}, 0, \dots, 0)$ et $y = (-\frac{1}{k}, 0, \dots, 0)$ sont deux points de F_k tels que $\|x - y\| = \frac{2}{k}$, et donc $d_k \geq \frac{2}{k}$. Par conséquent $d_k = \frac{2}{k}$.

Soit maintenant $x \in \bigcap_k F_k$: alors pour tout k on a $x \in F_k$, soit $\|x\| \leq 1/k$, et donc $\|x\| \leq 0$, c'est-à-dire $x = 0$. Inversement 0 appartient à tous les F_k , et donc à leur intersection. Par conséquent $\bigcap_k F_k$ est réduit au singleton $\{0\}$.

1.2. Pour chaque k , l'ensemble F_k est borné donc il existe une constante C_k telle que $\|x\| \leq C_k$ pour tout $x \in F_k$. En particulier par inégalité triangulaire on a $\|x - y\| \leq \|x\| + \|y\| \leq 2C_k$ pour tous x et $y \in F_k$. Ainsi l'ensemble $\{\|x - y\|, x, y \in F_k\}$ est un ensemble majoré de \mathbb{R} , de plus non vide car F_k est non vide, qui admet donc une borne supérieure. D'où l'existence du nombre réel d_k .

1.3. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. La suite réelle $(d_k)_k$ tend vers 0, donc il existe un entier K tel que $d_k \leq \varepsilon$ pour tout $k \geq K$. Soit alors $k, l \geq K$: le point x_k appartient à F_k , qui est inclus dans F_K , et de même pour x_l , donc

$$\|x_k - x_l\| \leq d_K \leq \varepsilon.$$

Autrement dit la suite $(x_k)_k$ est de Cauchy.

1.4. La suite $(x_k)_k$ étant de Cauchy, elle converge vers un x dans \mathbb{R}^n . Soit alors l un entier fixé. La sous-suite $(x_k)_{k \geq l}$ est une suite de points du fermé F_l , qui converge vers x , donc à la limite $x \in F_l$. Comme l est quelconque on en déduit que x appartient à l'intersection $\bigcap_l F_l$.

1.5. Soit x et y deux points de l'intersection $\bigcap_k F_k$: alors pour tout k les points x et y appartiennent à F_k , donc $\|x - y\| \leq d_k$. Comme ceci est vrai pour tout k et que la suite $(d_k)_k$ tend vers 0, on en déduit que $\|x - y\| = 0$, puis que $x = y$. Autrement dit $\bigcap_k F_k$ contient au plus un point, puis exactement un point d'après la question 1.4.

2. Un point x appartient à $\bigcap_k F_k$ ssi il appartient à F_k pour tout k , soit ssi $\|x\| \leq 1 + 1/k$ pour tout k , soit encore ssi $\|x\| \leq 1$, soit encore ssi x appartient à la boule fermée de centre 0 et de rayon 1.

Par conséquent $\bigcap_k F_k$ est la boule fermée de centre 0 et de rayon 1.

Ici l'intersection contient plus qu'un point : on ne peut appliquer le résultat de la question 1.5 car le diamètre d_k de F_k est $2(1 + 1/k)$ et ne tend pas vers 0.

3. Pour chaque k l'ensemble F_k est l'image réciproque de l'ensemble fermé $[k, +\infty[$ de \mathbb{R} par la fonction continue $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1$, donc est un fermé de \mathbb{R}^n .

Si maintenant $\bigcap_k F_k$ n'est pas vide, alors il contient un point $x = (x_1, \dots, x_n)$; pour tout k on a alors $x \in F_k$, soit $x_1 \geq k$, et ce pour tout k , ce qui est impossible. Autrement

dit $\bigcap_k F_k$ est vide. Ici on ne peut appliquer le résultat de la question 1.5 car les F_k ne sont pas bornés.

Exercice 2

1. Pour t réel on note que $f(x, y) \leq t$ ssi $x^2 + (y - 1)^2 \leq t + 1$, donc

si $t < -1$ alors l'ensemble de niveau t est l'ensemble vide, qui est fermé et borné par définition ;

si $t = -1$ alors l'ensemble de niveau t est réduit au point $(0, 1)$, qui est bien entendu fermé, et de plus borné car inclus dans toute boule de centre $(0, 1)$;

si $t > -1$ alors l'ensemble de niveau t est la boule fermée de centre $(0, 1)$ et de rayon $\sqrt{t + 1}$ pour la norme euclidienne, qui est un ensemble fermé et borné comme vu en cours.

2. Soit t fixé. L'ensemble E_t est l'image réciproque de l'intervalle $] - \infty, t]$ de \mathbb{R} qui est fermé dans \mathbb{R} par l'application f de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} qui est continue. L'ensemble E_t est donc fermé.

3. Soit t fixé. L'ensemble de niveau E_t est fermé d'après la question précédente. Il est de plus borné. En effet, s'il ne l'était pas, alors il existerait une suite de points $(x_k)_k$ de E_t de norme tendant vers l'infini. Comme f est coercive, la suite $(f(x_k))_k$ tendrait également vers l'infini, ce qui est impossible car cette suite est majorée par t .

4. Un point (x, y) appartient à l'ensemble de niveau 0 ssi $y^2 \leq x^2$, c'est-à-dire ssi $|y| \leq |x|$. L'ensemble de niveau est donc constitué de l'union du secteur angulaire situé dans le demi-plan $x \geq 0$ entre les droites d'équation $y = x$ et $y = -x$, et du secteur angulaire situé dans le demi-plan $x \leq 0$ entre les droites d'équation $y = x$ et $y = -x$.

La fonction est une fonction polynôme donc est continue sur \mathbb{R}^2 . Elle n'est pas coercive d'après la question 3. car, de plus, l'ensemble de niveau 0 n'est pas borné (par exemple il contient la droite d'équation $y = 0$).

5. Hors de la boule $B(0, 2)$, la fonction f prend des valeurs $f(x, y) = x^2 + y^2 \geq 4$, donc l'ensemble de niveau 3 est exactement la boule ouverte $B(0, 2)$.

La fonction f est coercive sur \mathbb{R}^2 car (hors d'une boule) égale au carré d'une norme ; elle n'est donc pas continue d'après la question 3. car, de plus, et par exemple, l'ensemble de niveau 3 n'est pas fermé.

Examen partiel du 6 avril 2011

Le sujet comporte **2** pages. L'épreuve dure 2 heures. Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits.

Exercice 1

Soit $(u_k)_k$ une suite de \mathbb{R}^n de limite u et $K = \{u_k; k \in \mathbb{N}\} \cup \{u\}$.

1. Montrer que l'ensemble K est un borné de \mathbb{R}^n .
2. Montrer que l'ensemble K est un fermé de \mathbb{R}^n . Pour cela on pourra montrer que son complémentaire est ouvert.

Exercice 2

1. Soit F un fermé de \mathbb{R}^n et K un fermé borné de \mathbb{R}^n . Montrer que $F \cap K$ est un fermé borné de \mathbb{R}^n .

2. Inversement soit F un sous-ensemble de \mathbb{R}^n tel que $F \cap K$ soit un fermé borné de \mathbb{R}^n pour tout fermé borné K de \mathbb{R}^n . Montrer que F est fermé. Pour cela on pourra utiliser les résultats de l'exercice 1.

Exercice 3

1. Montrer que $0 \leq 1 - \cos u \leq u^2/2$ pour tout réel u .
2. En déduire que la fonction f définie sur \mathbb{R}^2 par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1 - \cos(xy)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est continue sur \mathbb{R}^2 .

.../...

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^3 à valeurs dans \mathbb{R}^2 par

$$f(x, y, z) = (x + y^2, xy^2z).$$

Montrer que f est différentiable sur \mathbb{R}^3 et écrire la matrice jacobienne de f en tout point (x, y, z) par rapport aux bases canoniques de \mathbb{R}^3 et \mathbb{R}^2 .

Exercice 5

Soit f une fonction deux fois différentiable sur \mathbb{R}^2 à valeurs dans \mathbb{R} et g la fonction définie sur $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$ à valeurs dans \mathbb{R}^2 par

$$g(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

On pose $h = f \circ g$.

1. Montrer que h est différentiable sur $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$ et calculer ses dérivées partielles $\frac{\partial h}{\partial r}(r, \theta)$ et $\frac{\partial h}{\partial \theta}(r, \theta)$ en fonction de $r, \theta, \frac{\partial f}{\partial x}(g(r, \theta))$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(g(r, \theta))$.

2. En déduire les expressions de $\frac{\partial f}{\partial x}(g(r, \theta))$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(g(r, \theta))$ en fonction de $r, \theta, \frac{\partial h}{\partial r}(r, \theta)$ et $\frac{\partial h}{\partial \theta}(r, \theta)$.

3. En déduire les expressions de $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(g(r, \theta))$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(g(r, \theta))$ en fonction de r, θ et des dérivées partielles d'ordres un et deux de h au point (r, θ) .

4. En déduire la relation

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(g(r, \theta)) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(g(r, \theta)) = \frac{\partial^2 h}{\partial r^2}(r, \theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial r}(r, \theta) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2}(r, \theta).$$

5. Dans cette question uniquement on suppose que h ne dépend que de r et que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0$$

pour tout $(x, y) \neq (0, 0)$. Déduire de 4. l'expression de $h(r)$ pour $r > 0$ puis celle de $f(x, y)$ pour $(x, y) \neq (0, 0)$.

Corrigé

Exercice 1

1. Une suite convergente est bornée comme vu en cours et un singleton est borné, donc l'ensemble K est borné comme union de deux bornés.

2. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur \mathbb{R}^n .

Soit x un point du complémentaire de K . En particulier $x \neq u$, donc $r = \|x - u\|$ est > 0 . La suite $(u_k)_k$ convergeant vers u , il existe un entier l tel que $\|u_k - u\| < r/2$ pour tout $k \geq l$. En particulier

$$\|x - u_k\| \geq \|x - u\| - \|u - u_k\| \geq r/2$$

pour tout $k \geq l$. Notant

$$R = \inf\{\|x - u_k\|; k = 1, \dots, l - 1\}$$

qui est > 0 , on en déduit que

$$\|x - u_k\| \geq \inf\{r/2, R\}$$

pour tout entier k . Comme il en est de même de $\|u - x\|$, on en déduit que la boule ouverte de centre x et rayon $\inf\{r/2, R\}$ (qui est > 0) est incluse dans le complémentaire de K , qui est donc ouvert. Ainsi K est-il fermé.

Exercice 2

1. L'ensemble $F \cap K$ est fermé comme intersection des deux fermés F et K et borné car inclus dans le borné K .

2. Soit $(u_k)_k$ une suite de points de F , convergeant vers un u dans \mathbb{R}^n , et montrons que $u \in F$. D'après l'exercice 1, l'ensemble $K = \{u_k; k \in \mathbb{N}\} \cup \{u\}$ est un fermé borné de \mathbb{R}^n , donc par hypothèse sur F l'ensemble $F \cap K$ est un fermé (borné) de \mathbb{R}^n : ainsi la suite $(u_k)_k$ est une suite convergente du fermé $F \cap K$, donc sa limite u appartient aussi à $F \cap K$, et donc à F .

Comme $(u_k)_k$ est quelconque ceci implique que F est fermé.

Exercice 3

1. La fonction réelle $g(u) = u^2/2 - 1 + \cos u$ est deux fois dérivable sur \mathbb{R} , de dérivées $g'(u) = u - \sin u$ et $g''(u) = 1 - \cos u$. On en déduit successivement que $g''(u) \geq 0$ pour tout u , que g' est croissante, puis négative sur \mathbb{R}_- et positive sur \mathbb{R}_+ , étant nulle en 0. Enfin g atteint son minimum en 0, égal à 0, c'est-à-dire $g(u) \geq 0$ pour tout u . On en déduit le résultat.

2. On note tout d'abord que le dénominateur n'est nul qu'en $(0, 0)$.

La fonction f est continue en tout point différent de $(0, 0)$ comme quotient de fonctions continues, le dénominateur n'étant pas nul.

De plus

$$|f(x, y) - f(0, 0)| = \left| \frac{1 - \cos(xy)}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{(xy)^2}{2(x^2 + y^2)} \leq \frac{x^2}{2} \leq \frac{\|(x, y) - (0, 0)\|_2^2}{2}$$

pour tout $(x, y) \neq (0, 0)$. Ainsi f est également continue en $(0, 0)$.

Exercice 4

On pose $f_1(x, y, z) = x + y^2$ et $f_2(x, y, z) = xy^2z$. Les fonctions f_1 et f_2 étant polynomiales, elles admettent des dérivées partielles continues sur \mathbb{R}^3 , données par

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y, z) = 1, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y, z) = 2y, \quad \frac{\partial f_1}{\partial z}(x, y, z) = 0,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y, z) = y^2z, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y, z) = 2xyz, \quad \frac{\partial f_2}{\partial z}(x, y, z) = xy^2.$$

Ainsi f est continûment différentiable sur \mathbb{R}^3 , donc différentiable sur \mathbb{R}^3 , de matrice jacobienne en (x, y, z) donnée par

$$Jf(x, y, z) = \begin{bmatrix} 1 & 2y & 0 \\ y^2z & 2xyz & xy^2 \end{bmatrix}.$$

Exercice 5

1. La fonction h est différentiable comme composée de fonctions différentiables, de dérivées partielles données par

$$\frac{\partial h}{\partial r}(r, \theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(g(r, \theta)) \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y}(g(r, \theta)) \sin \theta,$$

$$\frac{\partial h}{\partial \theta}(r, \theta) = -\frac{\partial f}{\partial x}(g(r, \theta)) r \sin \theta + \frac{\partial f}{\partial y}(g(r, \theta)) r \cos \theta$$

pour $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

2. En multipliant la première relation par $\cos \theta$ et la deuxième par $-\frac{\sin \theta}{r}$, et en ajoutant, on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial x}(g(r, \theta)) = \cos \theta \frac{\partial h}{\partial r}(r, \theta) - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial h}{\partial \theta}(r, \theta).$$

De même

$$\frac{\partial f}{\partial y}(g(r, \theta)) = \sin \theta \frac{\partial h}{\partial r}(r, \theta) + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial h}{\partial \theta}(r, \theta).$$

3. En appliquant la première formule obtenue en 2. à $\frac{\partial f}{\partial x}$, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(g(r, \theta)) &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(g(r, \theta)) \right] - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(g(r, \theta)) \right] \\ &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \left[\cos \theta \frac{\partial h}{\partial r}(r, \theta) - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial h}{\partial \theta}(r, \theta) \right] \\ &\quad - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\cos \theta \frac{\partial h}{\partial r}(r, \theta) - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial h}{\partial \theta}(r, \theta) \right] \\ &= \cos^2 \theta \frac{\partial^2 h}{\partial r^2}(r, \theta) + \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r^2} \frac{\partial h}{\partial \theta}(r, \theta) \\ &\quad + \frac{\sin^2 \theta}{r} \frac{\partial h}{\partial r}(r, \theta) - \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r} \frac{\partial^2 h}{\partial r \partial \theta}(r, \theta) + \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2}(r, \theta). \end{aligned}$$

Un calcul analogue donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(g(r, \theta)) &= \sin^2 \theta \frac{\partial^2 h}{\partial r^2}(r, \theta) - \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r^2} \frac{\partial h}{\partial \theta}(r, \theta) \\ &\quad + \frac{\cos^2 \theta}{r} \frac{\partial h}{\partial r}(r, \theta) + \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r} \frac{\partial^2 h}{\partial r \partial \theta}(r, \theta) + \frac{\cos^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2}(r, \theta). \end{aligned}$$

4. Par addition on obtient la relation demandée.

5. Sous les hypothèses de 5. la fonction $h = h(r)$ est solution de l'équation différentielle

$$h''(r) + \frac{1}{r} h'(r) = 0$$

dans $]0, +\infty[$. Par intégration il existe des constantes C et D telles que $h'(r) = C/r$, puis $h(r) = C \ln r + D$. Ainsi

$$f(r \cos \theta, r \sin \theta) = C \ln r + D$$

pour tout $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, soit

$$f(x, y) = C' \ln(x^2 + y^2) + D$$

pour tout $(x, y) \neq (0, 0)$, puisque $r^2 = x^2 + y^2$, avec $C' = C/2$.

Contrôle continu du 4 mai 2011

Le sujet comporte 2 pages. L'épreuve dure 1 heure 30. Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits.

Exercice

1. Soit f une fonction convexe sur un sous-ensemble convexe U de \mathbb{R}^n et t_1, \dots, t_k k points de U . Montrer (par exemple par récurrence sur k) que $\frac{1}{k}(t_1 + \dots + t_k)$ appartient à U et que

$$f\left(\frac{1}{k}(t_1 + \dots + t_k)\right) \leq \frac{1}{k}(f(t_1) + \dots + f(t_k)).$$

2. Montrer que la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(t) = \ln(1 + e^t)$ est convexe sur \mathbb{R} .

3. Dédurre de 1. et 2. que pour tous nombres réels t_1, \dots, t_k

$$1 + \exp\left(\frac{t_1 + \dots + t_k}{k}\right) \leq \left[(1 + e^{t_1}) \dots (1 + e^{t_k})\right]^{1/k}.$$

4. Dédurre de 3. avec t_1, \dots, t_k bien choisis que pour tous nombres strictement positifs $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_k$

$$(a_1 \times \dots \times a_k)^{1/k} + (b_1 \times \dots \times b_k)^{1/k} \leq \left((a_1 + b_1) \times \dots \times (a_k + b_k)\right)^{1/k}.$$

Problème

Soit $\|\cdot\|$ une norme sur \mathbb{R}^n et α un réel > 0 .

Une fonction f définie sur \mathbb{R}^n à valeurs dans \mathbb{R} est dite α -convexe sur \mathbb{R}^n si

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) - \frac{\alpha}{2} t(1-t)\|x-y\|^2 \quad \text{pour tous } x, y \in \mathbb{R}^n \text{ et } t \in [0, 1].$$

On se propose de généraliser à ces fonctions α -convexes (pour $\alpha > 0$) certaines propriétés vues en cours pour les fonctions convexes (correspondant à $\alpha = 0$). Pour cela on pourra étendre les démonstrations de ces propriétés vues en cours.

1. (Exemple) On se place dans \mathbb{R} muni de la valeur absolue comme norme. Etant donnés trois nombres réels a, b et c , on considère la fonction f définie sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} par

$$f(x) = \frac{1}{2}ax^2 + bx + c.$$

1.1. Montrer que cette fonction f est α -convexe sur \mathbb{R} pour un certain $\alpha > 0$ si et seulement si a est > 0 .

Préciser dans le cas où $a > 0$ le plus grand α tel que f soit α -convexe.

1.2. Montrer dans le cas où $a > 0$ que f est coercive sur \mathbb{R} .

2. (Exemple. Généralisation) Etant donné une matrice A symétrique de taille (n, n) , un vecteur b de \mathbb{R}^n et un réel c , on considère la fonction f définie sur \mathbb{R}^n à valeurs dans \mathbb{R} par

$$f(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle + \langle b, x \rangle + c$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire euclidien sur \mathbb{R}^n .

2.1. Montrer que

$$f(tx + (1-t)y) = tf(x) + (1-t)f(y) - \frac{1}{2}t(1-t) \langle A(x-y), x-y \rangle$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$ et $t \in [0, 1]$.

2.2. En déduire que la fonction f est α -convexe sur \mathbb{R}^n pour un certain $\alpha > 0$ si et seulement si la matrice A est définie positive.

Soit maintenant fixée une fonction f définie sur \mathbb{R}^n à valeurs dans \mathbb{R} , différentiable et α -convexe pour un $\alpha > 0$.

3.1. Montrer que

$$f(y) - f(x) \geq df(x)(y-x) + \frac{\alpha}{2} \|x-y\|^2 \quad \text{pour tous } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

3.2. Montrer que

$$(df(y) - df(x))(y-x) \geq \alpha \|x-y\|^2 \quad \text{pour tous } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Un point a de \mathbb{R}^n est appelé un point de minimum global de f sur \mathbb{R}^n si

$$f(x) \geq f(a) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n.$$

4. Montrer que f est coercive (on pourra utiliser la question 3.1 par exemple). En déduire que f admet au moins un point de minimum global sur \mathbb{R}^n .

5. Montrer que f est strictement convexe sur \mathbb{R}^n . En déduire que f admet au plus un point de minimum global sur \mathbb{R}^n (pour cela on pourra considérer deux points de minimum global de f et montrer qu'ils sont égaux).

6. Soit a l'unique point de minimum global de f sur \mathbb{R}^n .

6.1. Pour $h \in \mathbb{R}^n$ fixé, développer $f(a+th)$ au voisinage de $t=0$ en utilisant la différentiabilité de f en a . Faire tendre t vers 0^+ et 0^- et en déduire que

$$\nabla f(a) = 0.$$

6.2. Montrer que pour toute suite $(x_k)_k$ de points de \mathbb{R}^n , on a pour tout entier k

$$f(x_k) - f(a) \geq \frac{\alpha}{2} \|x_k - a\|^2.$$

En déduire que toute suite minimisante pour f dans \mathbb{R}^n (c'est-à-dire toute suite $(x_k)_k$ de points de \mathbb{R}^n telle que $\lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_k) = f(a)$) converge vers le point a .

Corrigé

Exercice

1. On montre la proposition par récurrence sur k .

Pour $k = 1$ il n'y a rien à montrer. Supposons maintenant le résultat vrai à l'ordre $k - 1$ avec $k \geq 2$ et montrons-le à l'ordre k . Soit donc k points de U notés t_1, \dots, t_k . On écrit alors

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k t_i = \left(1 - \frac{1}{k}\right) \left[\frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^{k-1} t_i\right] + \frac{1}{k} t_k$$

où $\frac{1}{k} \in [0, 1]$, $t_k \in U$ et $\frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^{k-1} t_i \in U$ par hypothèse de récurrence à l'ordre $k - 1$. Or U

est convexe donc la combinaison convexe $\left(1 - \frac{1}{k}\right) \left[\frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^{k-1} t_i\right] + \frac{1}{k} t_k$, c'est-à-dire $\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k t_i$, appartient à U . De plus par la convexité de f , puis par l'hypothèse de récurrence à l'ordre $k - 1$

$$f\left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k t_i\right) \leq \left(1 - \frac{1}{k}\right) f\left(\frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^{k-1} t_i\right) + \frac{1}{k} f(t_k) \leq \left(1 - \frac{1}{k}\right) \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^{k-1} f(t_i) + \frac{1}{k} f(t_k) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k f(t_i).$$

2. La fonction f est bien définie sur tout \mathbb{R} car $1 + e^t > 0$ pour tout réel t , et est deux fois dérivable, avec

$$f'(t) = \frac{e^t}{1 + e^t} = \frac{1}{1 + e^{-t}}, \quad f''(t) = \frac{e^{-t}}{(1 + e^{-t})^2}.$$

Ainsi $f''(t) > 0$ pour tout réel t , donc f est (strictement) convexe sur \mathbb{R} .

3. D'après 1. et 2.

$$f\left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k t_i\right) \leq \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k f(t_i)$$

soit

$$\ln\left(1 + \exp\left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k t_i\right)\right) \leq \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \ln(1 + e^{t_i})$$

d'où le résultat en composant par la fonction exponentielle, qui est croissante.

4. On applique l'inégalité obtenue en 3. aux réels $t_i = \ln(b_i/a_i)$. On obtient

$$1 + \left(\frac{b_1}{a_1} \times \dots \times \frac{b_k}{a_k}\right)^{1/k} \leq \left(\left(1 + \frac{b_1}{a_1}\right) \times \dots \times \left(1 + \frac{b_k}{a_k}\right)\right)^{1/k}.$$

On multiplie alors par $(a_1 \times \dots \times a_k)^{1/k}$ pour obtenir l'inégalité cherchée.

Problème

1.1. Pour $x, y \in \mathbb{R}$ et $t \in [0, 1]$ on a

$$f(tx+(1-t)y) = tf(x)+(1-t)f(y)+\frac{1}{2}at(t-1)(x^2+y^2-2xy) = tf(x)+(1-t)f(y)-\frac{1}{2}at(1-t)|x-y|^2.$$

Ainsi pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et $t \in [0, 1]$ on a

$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y) - \frac{1}{2}\alpha t(1 - t)|x - y|^2$$

si et seulement si pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et $t \in [0, 1]$ on a

$$-\frac{1}{2}at(1-t)|x-y|^2 \leq -\frac{1}{2}\alpha t(1-t)|x-y|^2$$

c'est-à-dire si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\alpha|x|^2 \leq a|x|^2$$

c'est-à-dire si et seulement si

$$\alpha \leq a.$$

Ainsi la fonction f est α -convexe dans \mathbb{R} pour un certain $\alpha > 0$ si et seulement si $a > 0$.

Dans ce cas, la fonction f est α -convexe dans \mathbb{R} pour α tel que $0 < \alpha \leq a$ et donc $\alpha = a$ est le plus grand α pour lequel f est α -convexe.

1.2. Pour $a > 0$ la fonction f est un trinôme du second degré dont le coefficient de x^2 est > 0 . Par conséquent $f(x) \rightarrow +\infty$ si $|x| \rightarrow +\infty$, et f est coercive.

2.1. Pour $x, y \in \mathbb{R}^n$ et $t \in [0, 1]$ on a puisque la matrice A est symétrique

$$\begin{aligned} f(tx + (1 - t)y) &= tf(x) + (1 - t)f(y) - \frac{1}{2}t(1 - t)(\langle Ax, x \rangle + \langle Ax, y \rangle + \langle Ay, x \rangle + \langle Ay, y \rangle) \\ &= tf(x) + (1 - t)f(y) - \frac{1}{2}t(1 - t)\langle A(x - y), x - y \rangle. \end{aligned}$$

2.2. Ainsi pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$ et $t \in [0, 1]$, on a

$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y) - \frac{1}{2}\alpha t(1 - t)\|x - y\|^2$$

si et seulement si pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$ et $t \in [0, 1]$, on a

$$-\frac{1}{2}t(1-t)\langle A(x-y), x-y \rangle \leq -\frac{1}{2}\alpha t(1-t)\|x-y\|^2$$

c'est-à-dire si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\alpha\|x\|^2 \leq \langle Ax, x \rangle.$$

Par conséquent, si f est α -convexe, alors $\langle Ax, x \rangle > 0$ pour tout $x \neq 0$, c'est-à-dire A est définie positive.

Inversement, si A est définie positive, alors d'après le cours il existe $\alpha > 0$ (noté m dans le cours) tel que

$$\langle Ax, x \rangle \geq \alpha\|x\|^2$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, et donc f est α -convexe.

Ainsi la fonction f est α -convexe dans \mathbb{R}^n pour un certain $\alpha > 0$ si et seulement si la matrice A est définie positive.

3.1. On suppose d'abord que f est α -convexe dans \mathbb{R}^n .

Soit x et y fixés dans \mathbb{R}^n et g la fonction définie sur \mathbb{R} en posant

$$g(t) = f(x + t(y - x)).$$

Comme la fonction f est différentiable en x , la fonction g est dérivable en 0 avec

$$g'(0) = df(x)(y - x).$$

Comme la fonction f est α -convexe, la fonction g vérifie pour $t \in [0, 1]$

$$g(t) \leq (1 - t)g(0) + tg(1) - \frac{\alpha}{2}t(1 - t)\|x - y\|^2,$$

donc en particulier pour $t \in]0, 1]$

$$\frac{g(t) - g(0)}{t} \leq g(1) - g(0) - \frac{\alpha}{2}(1 - t)\|x - y\|^2.$$

Par conséquent en faisant tendre t vers 0 à droite, on en déduit à la limite que

$$g'(0) \leq g(1) - g(0) - \frac{\alpha}{2}\|x - y\|^2,$$

c'est-à-dire

$$df(x)(y - x) \leq f(y) - f(x) - \frac{\alpha}{2}\|x - y\|^2.$$

3.2. Soit $x, y \in \mathbb{R}^n$. Alors, d'après la question 3.1, d'une part

$$f(y) - f(x) \geq df(x)(y - x) + \frac{\alpha}{2}\|x - y\|^2$$

et d'autre part

$$f(x) - f(y) \geq df(y)(x - y) + \frac{\alpha}{2}\|x - y\|^2.$$

En ajoutant on obtient

$$(df(y) - df(x))(y - x) \geq \alpha\|x - y\|^2.$$

4. De la minoration obtenue en 3.1 par exemple, il résulte en particulier que pour un $a \in \mathbb{R}^n$ fixé on a pour tout $y \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} f(y) &\geq f(a) + \langle \nabla f(a), y - a \rangle + \frac{\alpha}{2}\|y - a\|^2 \\ &\geq f(a) - \langle \nabla f(a), a \rangle - \frac{\alpha}{2}\|a\|^2 - \|\nabla f(a)\|_2 \|y\|_2 + \frac{\alpha}{4}\|y\|^2. \end{aligned}$$

Or pour $\alpha > 0$ et quels que soient les réels b et c , le trinôme $\frac{\alpha}{4}x^2 + bx + c$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

Ainsi la fonction f est coercive dans \mathbb{R}^n .

Comme de plus f est continue sur \mathbb{R}^n , le théorème de Weierstrass assure qu'il existe au moins un point a de minimum global de f dans \mathbb{R}^n .

5. La fonction f est strictement convexe dans \mathbb{R}^n car

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) - \frac{\alpha}{2}t(1-t)\|x-y\|^2 < tf(x) + (1-t)f(y)$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$ avec $x \neq y$ et $t \in]0, 1[$.

Soit alors a et b deux points de minimum global de f sur \mathbb{R}^n , et soit

$$m = f(a) = f(b)$$

la valeur du minimum. Si $a \neq b$, alors par stricte convexité de f ,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) < \frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(b) = m$$

ce qui est impossible. Ainsi $a = b$ et donc f admet au plus un point de minimum global sur \mathbb{R}^n .

Ainsi il existe un et un seul point a de minimum global de f dans \mathbb{R}^n .

6.1. Soit $h \in \mathbb{R}^n$ fixé. La fonction f est différentiable en a , donc il existe une fonction ε , continue et nulle en 0, telle que

$$f(a+th) = f(a) + t \langle \nabla f(a), h \rangle + \|th\| \varepsilon(th)$$

pour tout t proche de 0, soit

$$\frac{f(a+th) - f(a)}{t} = \langle \nabla f(a), h \rangle + \frac{|t|}{t} \|h\| \varepsilon(th)$$

pour $t \neq 0$. Pour tout $t > 0$ le membre de gauche est positif car a est un point de minimum global, et le membre de droite tend vers $\langle \nabla f(a), h \rangle$ quand $t \rightarrow 0^+$, donc à la limite $\langle \nabla f(a), h \rangle \geq 0$. De même on montre que $\langle \nabla f(a), h \rangle \leq 0$ pour $t \rightarrow 0^-$, si bien que $\langle \nabla f(a), h \rangle = 0$.

Comme h est quelconque on en déduit que $\nabla f(a) = 0$.

6.2. Soit $(x_k)_k$ une suite de points de \mathbb{R}^n . Comme f est α -convexe dans \mathbb{R}^n , alors pour tout k

$$f(x_k) - f(a) \geq \langle \nabla f(a), x_k - a \rangle + \frac{\alpha}{2} \|x_k - a\|^2$$

d'après 3.1. Comme de plus a est un point de minimum global de f dans \mathbb{R}^n , alors $\nabla f(a) = 0$, d'où l'inégalité demandée.

Cette inégalité assure que si la suite $(f(x_k))_k$ converge vers $f(a)$, alors la suite $(x_k)_k$ converge vers a .

Examen du 6 juin 2011

Le sujet comporte **2** pages. L'épreuve dure 2 heures. Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits.

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^2 à valeurs dans \mathbb{R} par

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

et U l'ensemble

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; xy = 1\}.$$

1. Déterminer les éventuels points d'extremum de la fonction f sur U et leur nature
(i) par la méthode des multiplicateurs de Lagrange ;
(ii) par réduction à un problème à une variable.
2. Donner l'interprétation géométrique du résultat précédent.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^n à valeurs dans \mathbb{R} par

$$f(x) = \prod_{i=1}^n x_i(1 - x_i),$$

et U l'ensemble

$$U = \{x \in \mathbb{R}^n; x_i \geq 0, i = 1, \dots, n; \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$$

où $x = (x_1, \dots, x_n)$.

1. Déterminer sans calcul le minimum de la fonction f sur U .
2. Montrer que f admet au moins un point de maximum global sur U .
3. Soit x un tel point.
 - 3.1. Montrer que $x_i \in]0, 1[$ pour tout i .
 - 3.2. Montrer par la méthode de Lagrange qu'il existe un réel λ tel que

$$\lambda x_i^2 - (\lambda + 2f(x)) x_i + f(x) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

- 3.3. En déduire que tous les x_i sont égaux en discutant suivant le signe éventuel de λ .
4. Déterminer l'unique point de maximum global de f sur U .

5. En déduire que

$$\prod_{i=1}^n x_i \left(\sum_{j=1}^n x_j - x_i \right) \leq (n-1)^n \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j \right)^{2n}$$

pour tous nombres $x_i \geq 0$ pour $i = 1, \dots, n$.

Problème

Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ on note de façon générale $x = (x', x_n)$ avec $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$. On admet le théorème suivant, dit théorème des fonctions implicites :

Théorème 1. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n pour $n \geq 2$ et g une fonction C^1 de Ω dans \mathbb{R} .

Si a est un point de Ω tel que $g(a) = 0$ et $\frac{\partial g}{\partial x_n}(a) \neq 0$, alors il existe une boule ouverte V' contenant a' dans \mathbb{R}^{n-1} , une boule ouverte V_n contenant a_n dans \mathbb{R} et une unique fonction φ de classe C^1 dans V' à valeurs dans V_n tels que

$$\begin{cases} (x', x_n) \in V' \times V_n \\ g(x', x_n) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' \in V' \\ x_n = \varphi(x'). \end{cases}$$

1. Dans les conditions du théorème 1, montrer que $g(x', \varphi(x')) = 0$ pour tout $x' \in V'$. En déduire, pour $i = 1, \dots, n-1$ et $x' \in V'$, que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x') = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x_i}(x', \varphi(x'))}{\frac{\partial g}{\partial x_n}(x', \varphi(x'))}.$$

2. (Exemple, $n = 2$) Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 , g une fonction C^1 de Ω dans \mathbb{R} , et

$$U = \{(x, y) \in \Omega; g(x, y) = 0\}.$$

Soit $a = (x_0, y_0)$ un point de U en lequel $\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

2.1. Énoncer le théorème des fonctions implicites au point a pour la fonction g . En déduire, avec la fonction φ ainsi obtenue, que la courbe U admet en a une tangente d'équation

$$y - y_0 = \varphi'(x_0)(x - x_0).$$

2.2. En déduire que la courbe U admet en a une tangente d'équation

$$(x - x_0) \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

2.3. Le résultat de la question 2.2. reste-t-il vrai si $\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ mais $\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$?

3. (Exemple, $n = 2$) Montrer que la courbe U de \mathbb{R}^2 d'équation $x^3 + y^3 - 3xy = 1$ est, localement autour du point $(0, 1)$, d'équation $y = \varphi(x)$. Déterminer le développement limité d'ordre 1 de φ au voisinage de 0 et l'équation de la tangente à U en $(0, 1)$.

4. On se propose de déduire du théorème des fonctions implicites le théorème de Lagrange, dans le cadre d'un ouvert non vide Ω de \mathbb{R}^n , de deux fonctions C^1 f et g de Ω dans \mathbb{R} , du sous-ensemble U de Ω défini par

$$U = \{x \in \Omega; g(x) = 0\}$$

et d'un point a de U .

4.1. Énoncer le théorème de Lagrange dans ce cadre.

4.2. En supposant par exemple que $\frac{\partial g}{\partial x_n}(a) \neq 0$, montrer l'existence d'une fonction φ telle que localement autour du point a l'ensemble U soit d'équation $x_n = \varphi(x')$.

4.3. Montrer qu'il existe un ouvert V' de \mathbb{R}^{n-1} contenant a' tel que la fonction F définie par

$$F(x') = f(x', \varphi(x'))$$

admette un extremum relatif en a' .

4.4. Ecrire l'équation d'Euler pour la fonction F en a' et en déduire le théorème de Lagrange.

Corrigé

Exercice 1.

1. La fonction f est continue et coercive car $f(x, y)$ est le carré de la norme euclidienne du vecteur (x, y) . De plus l'ensemble U est fermé comme image réciproque du point $\{1\}$ de \mathbb{R} par la fonction continue $(x, y) \mapsto xy$. Par conséquent f admet au moins un point de minimum global sur U .

(i) Soit $g(x, y) = xy - 1$. Comme $\nabla g(x, y) = (y, x)$ qui est non nul sur U , tous les points de U sont des points de qualification de la contrainte, donc les conditions du théorème de Lagrange sont vérifiées. On cherche donc les points de minimum de f sur U en cherchant les points critiques du lagrangien

$$L((x, y), \lambda) = x^2 + y^2 - \lambda(xy - 1)$$

dans $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ par la résolution des équations d'Euler

$$\begin{cases} 2x - \lambda y = 0 \\ 2y - \lambda x = 0 \\ xy = 1 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x = y = \pm 1 \\ \lambda = 2. \end{cases}$$

Il y a donc deux points critiques du lagrangien, à savoir les points $(\pm(1, 1), 2)$.

Ainsi f atteint son minimum parmi les deux points $\pm(1, 1)$, et comme $f(1, 1) = f(-1, -1) = 1$, le minimum de f sur U est atteint aux points $\pm(1, 1)$, qui sont les points de minimum global de f sur U .

(ii) Comme $y = 1/x$ sur U , l'étude de f sur U se ramène à l'étude de la fonction

$$F(x) = x^2 + 1/x^2$$

dans \mathbb{R}^* . Or $F'(x) = 2x - 2/x^3$ qui est nul en ± 1 , donc en dressant le tableau de variation de F on observe que F admet deux points de minimum en $x = \pm 1$, et donc f atteint son minimum sur U en les deux points de $\pm(1, 1)$.

2. Soit $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur \mathbb{R}^2 . Comme $x^2 + y^2 = \|(x, y) - (0, 0)\|^2$, on a

$$\inf\{x^2 + y^2; (x, y) \in U\} = \inf\{\|(x, y) - (0, 0)\|^2; (x, y) \in U\} = \left[\inf\{\|(x, y) - (0, 0)\|; (x, y) \in U\} \right]^2$$

qui est le carré de la distance euclidienne du point $(0, 0)$ à l'hyperbole U .

Exercice 2

1. Chaque coordonnée x_i de $x \in U$ appartient à $[0, 1]$, donc $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in U$. De plus $(1, 0, \dots, 0) \in U$ et $f(1, 0, \dots, 0) = 0$, donc f atteint son minimum sur U , qui est égal à 0.

2. La fonction f est continue sur \mathbb{R}^2 . De plus l'ensemble U est fermé comme intersection des n images réciproques du fermé $[0, +\infty[$ par les fonctions continues $x \mapsto x_i$ pour $i = 1, \dots, n$ et de l'image réciproque de $\{0\}$ par la fonction continue $x \mapsto x_1 + \dots + x_n - 1$. Enfin U est borné car contenu dans la boule de centre 0 et rayon 1 pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Par conséquent, par le théorème de Weierstrass, la fonction f admet au moins un point de maximum global sur U .

3. Soit alors x un point de maximum global de f sur U .

3.1. Le point x appartient à U donc $x_i \in [0, 1]$ pour tout i . De plus f prend des valeurs > 0 , donc son maximum est > 0 , et f est nulle en tout point ayant au moins une de ses coordonnées égale à 0 ou 1, donc toutes les coordonnées de x sont dans $]0, 1[$.

3.2. Soit $g(x) = x_1 + \dots + x_n - 1$. Comme $\nabla g(x) = (1, \dots, 1)$ qui est non nul sur U , tous les points de U sont des points de qualification de la contrainte, donc les conditions du théorème de Lagrange sont vérifiées.

Le point x est donc un point critique du lagrangien

$$L(x, \lambda) = \prod_{i=1}^n x_i(1 - x_i) - \lambda \left(\sum_{i=1}^n x_i - 1 \right)$$

dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ et est donc solution des équations d'Euler

$$\begin{cases} \prod_{j \neq i} x_j(1 - x_j)(1 - 2x_i) - \lambda = 0, & i = 1, \dots, n \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1 \end{cases}$$

En particulier, en multipliant la première équation par $x_i(1 - x_i)$, chaque coordonnée x_i du point x vérifie l'équation

$$f(x)(1 - 2x_i) - \lambda x_i(1 - x_i) = 0,$$

soit

$$\lambda x_i^2 - (\lambda + 2f(x)) x_i + f(x) = 0.$$

3.3

Cas 1 : $\lambda = 0$. Alors $f(x)(1 - 2x_i) = 0$. Or $f(x) \neq 0$ comme on l'a vu dans la question 2.1, donc $x_i = 1/2$. Si $n \neq 2$ c'est impossible car $\sum_{i=1}^n x_i = 1$. Si $n = 2$ alors le point $((1/2, 1/2), 0)$ est l'unique solution des équations d'Euler telle que $\lambda = 0$.

Cas 2 : $\lambda \neq 0$. Alors x_i est l'une des deux racines

$$\frac{1 + 2f(x)/\lambda \pm \sqrt{1 + 4(f(x)/\lambda)^2}}{2}$$

du trinôme, qui sont indépendantes de i .

Si $\lambda < 0$, alors la plus petite racine est < 0 ; or les x_i sont > 0 , donc les x_i sont tous égaux à la plus grande racine.

De même, si $\lambda > 0$, alors la plus grande racine est > 1 ; or les x_i sont < 1 et donc les x_i sont tous égaux à la plus petite racine.

Dans tous les cas les x_i sont tous égaux, et comme ils sont de somme 1 ils sont tous égaux à $1/n$.

4. D'après la question 2.3 le point $(1/n, \dots, 1/n)$ est l'unique point de maximum de f sur U .

5. D'après la question 3 on a $f(x) \leq f(1/n, \dots, 1/n)$ pour tout $x \in U$, c'est-à-dire

$$\prod_{i=1}^n x_i(1 - x_i) \leq \frac{(n-1)^n}{n^{2n}}$$

pour tous $x_i \geq 0$ de somme 1.

Si maintenant les x_i sont n nombres positifs de somme quelconque non nulle, on applique le résultat précédent aux réels $x_i / \sum_{i=1}^n x_i$, qui sont de somme 1. On en déduit le résultat.

Si maintenant x_i sont n nombres positifs de somme nulle, alors tous les x_i sont nuls et le résultat est trivial.

Examen de septembre 2011 - session de rattrapage

Le sujet comporte **2** pages. L'épreuve dure 2 heures. Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits.

Exercice 1

On se place dans \mathbb{R}^n muni d'une norme $\|\cdot\|$.

1. Montrer (par exemple par l'absurde) que l'application $x \mapsto \|x\|$ n'est pas différentiable en 0.

2. Montrer que l'application $x \mapsto \|x\|$ est convexe sur \mathbb{R}^n mais n'est pas strictement convexe sur \mathbb{R}^n (pour cela on pourra considérer la restriction de cette application à une droite de \mathbb{R}^n).

3. Montrer que l'application $x \mapsto \|x\|^2$ est différentiable en 0.

4. Dans cette question uniquement on suppose que la norme considérée est la norme euclidienne. Montrer que l'application $x \mapsto \|x\|^2$ est strictement convexe sur \mathbb{R}^n .

Exercice 2

Soit a et b deux nombres réels et soit f la fonction définie sur

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0, y > 0\}$$

par

$$f(x, y) = x^a + y^b.$$

Etudier la convexité, stricte convexité, concavité, stricte concavité de f sur Ω suivant les valeurs de a et b .

Exercice 3

Soit

$$\Omega = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_i > 0, i = 1, \dots, n\},$$

a_1, \dots, a_n n réels négatifs, et f la fonction définie sur Ω par

$$f(x) = x_1^{a_1} \times \dots \times x_n^{a_n}$$

pour $x = (x_1, \dots, x_n)$.

1. Montrer que la fonction f est convexe sur Ω .

2. Dans cette question uniquement on prend $a_1 = \dots = a_n = -1/n$. Montrer que la fonction f admet un unique point de minimum global sur

$$U = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_i > 0, i = 1, \dots, n, \sum_{i=1}^n x_i = 1\},$$

que l'on déterminera.

En déduire l'inégalité arithmético-géométrique

$$(x_1 \times \dots \times x_n)^{1/n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$

pour tous nombres réels x_1, \dots, x_n strictement positifs.

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^2 à valeurs dans \mathbb{R} par

$$f(x, y) = xy$$

et U l'ensemble

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + 4y = 16\}.$$

Montrer que f admet un unique point de maximum global sur U et le déterminer

(i) par la méthode des multiplicateurs de Lagrange ;

(ii) par réduction à un problème à une variable.

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^2 à valeurs dans \mathbb{R} par

$$f(x, y) = x^2 y$$

et U l'ensemble

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 2x^2 + y^2 = 3\}.$$

1. Montrer que f admet au moins un point de minimum global sur U et au moins un point de maximum global sur U .

2. Déterminer tous les points d'extremum, local et global, de f sur U , en donnant leur nature,

(i) par la méthode des multiplicateurs de Lagrange ;

(ii) par réduction à un problème à une variable.

Corrigé

Exercice 1

1. On suppose par l'absurde que f définie sur \mathbb{R}^n par $f(x) = \|x\|$ est différentiable en 0. Alors pour h petit

$$f(0+h) = f(0) + \langle \nabla f(0), h \rangle + \|h\|\varepsilon(h)$$

où ε est une fonction définie dans un voisinage de 0 dans \mathbb{R}^n , continue et nulle en 0, soit

$$\|h\| = \langle \nabla f(0), h \rangle + \|h\|\varepsilon(h)$$

soit pour $h \neq 0$

$$1 = \langle \nabla f(0), \frac{h}{\|h\|} \rangle + \varepsilon(h).$$

En changeant h en $-h$ on a aussi

$$1 = - \langle \nabla f(0), \frac{h}{\|h\|} \rangle + \varepsilon(-h)$$

puis en ajoutant

$$2 = \varepsilon(h) + \varepsilon(-h).$$

En faisant tendre h vers 0 on arrive à l'absurdité

$$2 = 0.$$

Ainsi f n'est pas différentiable en 0.

2. Pour $x, y \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in [0, 1]$ on a

$$\|\lambda x + (1-\lambda)y\| \leq \|\lambda x\| + \|(1-\lambda)y\| = \lambda\|x\| + (1-\lambda)\|y\|$$

par inégalité triangulaire puis par homogénéité. Ainsi $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \|x\|$ est convexe sur \mathbb{R}^n .

Par contre f n'est pas strictement convexe sur \mathbb{R}^n . Par exemple sur la droite $D = \{tu; t \in \mathbb{R}\}$ où u est un vecteur non nul de \mathbb{R}^n , on a pour $\lambda \in]0, 1[, t, s \geq 0$ avec $t \neq s$:

$$\|\lambda(tu) + (1-\lambda)(su)\| = |\lambda t + (1-\lambda)s| \|u\| = (\lambda t + (1-\lambda)s) \|u\| = \lambda t \|u\| + (1-\lambda)s \|u\| = \lambda \|tu\| + (1-\lambda) \|su\|.$$

Ainsi on a

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

pour des points x et y distincts.

3. L'application $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \|x\|^2$ est telle que

$$g(0+h) = \|h\|^2 = g(0) + \langle 0, h \rangle + \|h\|\varepsilon(h)$$

où $\varepsilon(h) = \|h\|$ est bien définie dans un voisinage de 0 dans \mathbb{R}^n , continue et nulle en 0. Ainsi g est bien différentiable en 0, de différentielle nulle.

4. Dans le cas où la norme considérée est la norme euclidienne, l'application g est strictement convexe sur \mathbb{R}^n . En effet elle est alors donnée par

$$g(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2$$

si $x = (x_1, \dots, x_n)$. Elle est en particulier deux fois différentiable sur \mathbb{R}^n , de matrice hessienne constante égale à deux fois l'identité; cette matrice hessienne est donc définie positive en tout point, et donc g est strictement convexe sur \mathbb{R}^n .

Exercice 2

On note tout d'abord que Ω est un sous-ensemble ouvert et convexe de \mathbb{R}^2 .

La fonction f est deux fois différentiable sur \mathbb{R}^2 et sa hessienne au point (x, y) est donnée par

$$Hf(x, y) = \begin{bmatrix} a(a-1)x^{a-2} & 0 \\ 0 & b(b-1)y^{b-2} \end{bmatrix}.$$

Ainsi la fonction f est convexe sur Ω ssi la matrice $Hf(x, y)$ est semi-définie positive en tout $(x, y) \in \Omega$, soit ssi $a(a-1) \geq 0$ et $b(b-1) \geq 0$, soit ssi d'une part $a \leq 0$ ou $a \geq 1$, et d'autre part $b \leq 0$ ou $b \geq 1$.

De même la fonction f est strictement convexe sur Ω ssi la matrice $Hf(x, y)$ est définie positive en tout $(x, y) \in \Omega$, soit ssi $a(a-1) > 0$ et $b(b-1) > 0$, soit ssi d'une part $a < 0$ ou $a > 1$, et d'autre part $b < 0$ ou $b > 1$.

De même la fonction f est concave sur Ω ssi la matrice $Hf(x, y)$ est semi-définie négative en tout $(x, y) \in \Omega$, soit ssi $a(a-1) \leq 0$ et $b(b-1) \leq 0$, soit ssi d'une part $0 \leq a \leq 1$ et d'autre part $0 \leq b \leq 1$.

Enfin la fonction f est strictement concave sur Ω ssi la matrice $Hf(x, y)$ est définie négative en tout $(x, y) \in \Omega$, soit ssi $a(a-1) < 0$ et $b(b-1) < 0$, soit ssi d'une part $0 < a < 1$ et d'autre part $0 < b < 1$.

Exercice 3

1. On note tout d'abord que l'ensemble Ω est un sous-ensemble ouvert et convexe de \mathbb{R}^n . De plus

$$f(x) = \exp\left(\sum_{i=1}^n a_i \ln x_i\right).$$

Or la fonction \ln est concave et les a_i sont négatifs, donc

$$h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n a_i \ln x_i$$

est convexe comme somme de fonctions convexes. Puis \exp est convexe et croissante, donc par composition $f = \exp \circ h$ est convexe sur Ω .

2. Soit $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{i=1}^n x_i - 1$. Comme $\nabla g(x) = (1, \dots, 1)$ qui est non nul sur U , tous les points de U sont des points de qualification de la contrainte, donc les conditions du théorème de Lagrange sont vérifiées.

Soit alors $a = (x_1, \dots, x_n)$ un point d'extremum local de f sur U . Alors a est un point critique du lagrangien

$$L(x, \lambda) = \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{-1/n} - \lambda \left(\sum_{i=1}^n x_i - 1 \right)$$

dans $\Omega \times \mathbb{R}$, c'est-à-dire est solution des équations d'Euler

$$\begin{cases} -\frac{1}{n} \left(\prod_{j \neq i} x_j \right)^{-1/n} x_i^{-1/n-1} - \lambda = 0, & i = 1, \dots, n \\ \sum_{i=1}^n x_i - 1 = 0 \end{cases}$$

On déduit de la première ligne que les x_i sont égaux, puis égaux à $1/n$ par la deuxième ligne, puis que $\lambda = -n$. Ainsi le lagrangien admet un unique point critique, le point $((1/n, \dots, 1/n), -n)$ et donc nécessairement $a = (1/n, \dots, 1/n)$: la fonction f admet au plus un point d'extremum sur U en ce point a .

Pour déterminer la nature de a , on note que pour $\lambda = -n$ le point $(1/n, \dots, 1/n)$ est un point critique de

$$L(\cdot, -n) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) + ng(x) = \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{-1/n} + n \left(\sum_{i=1}^n x_i - 1 \right).$$

Comme de plus f est convexe et g est affine sur Ω , la fonction $L(\cdot, -n)$ est convexe sur Ω , et donc $(1/n, \dots, 1/n)$ est un point de minimum global de $L(\cdot, -n)$ sur Ω . Par conséquent c'est un point de minimum global de f sur U , puis l'unique point de minimum global de f sur U .

En particulier, si $x \in U$, alors $f(x) \geq f(1/n, \dots, 1/n) = n$, c'est-à-dire

$$\left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{-1/n} \geq n$$

pour tous $x_1, \dots, x_n > 0$ tels que $\sum_{i=1}^n x_i = 1$. On en déduit l'inégalité arithmético-géométrique par homogénéité.

Exercice 4

(i) Soit $g(x, y) = x + 4y - 16$. Comme $\nabla g(x, y) = (1, 4)$ qui est non nul sur U , tous les points de U sont des points de qualification de la contrainte, donc les conditions du théorème de Lagrange sont vérifiées. On cherche donc les points d'extremum de f sur U en cherchant les points critiques du lagrangien

$$L((x, y), \lambda) = xy - \lambda(x + 4y - 16)$$

dans $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ par la résolution des équations d'Euler

$$\begin{cases} y - \lambda = 0 \\ x - 4\lambda = 0 \\ x + 4y - 16 = 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} y = \lambda \\ x = 4\lambda \\ 8\lambda = 16 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x = 8 \\ y = 2 \\ \lambda = 2. \end{cases}$$

Il y a donc un unique point critique du lagrangien, à savoir le point $((8, 2), 2)$.

Le point $(8, 2)$ est donc le seul point d'extremum éventuel de f sur U .

On regarde maintenant si ce point est bien un point d'extremum de f sur U . Pour cela on étudie la différence

$$f(8 + h, 2 + k) - f(8, 2)$$

sous la contrainte $g(8 + h, 2 + k) = 0$. Cette contrainte s'écrit

$$8 + h + 4(2 + k) - 16 = 0$$

soit

$$h + 4k = 0.$$

Dans ce cas

$$f(8 + h, 2 + k) - f(8, 2) = (8 + h)(2 + k) - 16 = 8k + 2h + hk = hk = -4k^2$$

qui est < 0 pour tout $k \neq 0$. Ainsi f possède un unique point de maximum global en $(8, 2)$.

(ii) Comme $x = 16 - 4y$ sur U , l'étude de f sur U se ramène à l'étude de la fonction

$$F(y) = (16 - 4y)y = 16y - 4y^2$$

dans \mathbb{R} . Or $F'(y) = 8(2 - y)$ qui est nul en $y = 2$, donc en dressant le tableau de variation de F on observe que F admet un unique point de maximum en $y = 2$, et donc f admet un unique point de maximum sur U en $(8, 2)$.

Exercice 5

1. La fonction f est continue sur \mathbb{R}^2 . De plus l'ensemble U est fermé comme image réciproque du point $\{0\}$ de \mathbb{R} par la fonction continue $g(x, y) = 2x^2 + y^2 - 3$ et borné car tous les points (x, y) de U sont tels que $|x| \leq \sqrt{3/2}$ et $|y| \leq \sqrt{3}$. Par conséquent, par le théorème de Weierstrass, f admet au moins un point de minimum global et au moins un point de maximum global sur U .

2. (i) Soit $g(x, y) = 2x^2 + y^2 - 3$. Comme $\nabla g(x, y) = (4x, 2y)$ qui est non nul sur U , tous les points de U sont des points de qualification de la contrainte, donc les conditions du théorème de Lagrange sont vérifiées. On cherche donc les points de minimum de f sur U en cherchant les points critiques du lagrangien

$$L((x, y), \lambda) = x^2y - \lambda(2x^2 + y^2 - 3)$$

dans $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ par la résolution des équations d'Euler

$$\begin{cases} 2xy - 4\lambda x = 0 \\ x^2 - 2\lambda y = 0 \\ 2x^2 + y^2 - 3 = 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x(y - 2\lambda) = 0 \\ x^2 - 2\lambda y = 0 \\ 2x^2 + y^2 - 3 = 0. \end{cases}$$

De la première équation on obtient $x = 0$ ou $y = 2\lambda$.

Si $x = 0$, alors $y = \pm\sqrt{3}$ puis $\lambda = 0$.

Si $y = 2\lambda$, alors $x^2 = 4\lambda^2$ puis $12\lambda^2 = 3$. On obtient alors $\lambda = \pm 1/2$, $x = \pm 1$ et $y = 2\lambda$.

Le lagrangien admet donc 6 points critiques :

$$((0, \pm\sqrt{3}), 0), \quad ((\pm 1, 1), 1/2), \quad ((\pm 1, -1), -1/2).$$

Or f admet au moins un point de maximum global et au moins un point de minimum global sur U , qui sont donc parmi ces 6 points. Comme de plus

$$f(0, \pm\sqrt{3}) = 0, \quad f(\pm 1, 1) = 1, \quad f(\pm 1, -1) = -1$$

on en déduit que f atteint son maximum global sur U en les deux points $(\pm 1, 1)$ et son minimum global sur U en les deux points $(\pm 1, -1)$.

Il reste à déterminer la nature des points $(0, \pm\sqrt{3})$; d'après ce qui précède ce ne sont ni des points de maximum global ni des points de minimum global. Or

- pour $x \in \mathbb{R}$ et $y > 0$, on a $f(x, y) = x^2 y \geq 0 = f(0, \sqrt{3})$, donc $(0, \sqrt{3})$ est un point de minimum local de f sur U , non global.

- pour $x \in \mathbb{R}$ et $y < 0$, on a $f(x, y) = x^2 y \leq 0 = f(0, -\sqrt{3})$, donc $(0, -\sqrt{3})$ est un point de maximum local de f sur U , non global.

(ii) Comme $x^2 = (3 - y^2)/2$ sur U , l'étude de f sur U se ramène à l'étude de la fonction

$$F(y) = (3 - y^2)y/2$$

dans $[-\sqrt{3}, +\sqrt{3}]$. Or $F'(y) = 3(1 - y)(1 + y)/2$ qui est nul en ± 1 , donc en dressant le tableau de variation de F on observe que F admet un point de maximum local en $y = -\sqrt{3}$, un point de minimum global en $y = -1$, un point de maximum global en $y = 1$ et un point de minimum local en $y = \sqrt{3}$. Ainsi f atteint un point de maximum local en $(0, -\sqrt{3})$, un point de minimum global en $(\pm 1, -1)$, un point de maximum global en $(\pm 1, 1)$ et un point de minimum local en $(0, \sqrt{3})$.