Université Paris Dauphine
DEMI2E 2e année
Calcul différentiel

TD 6. Optimisation sans contrainte

Exercice 1. Déterminer les extrema locaux des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= x^3+3xy^2-15x-12y, & f_2(x,y) &= 3x^3+xy^2-xy, \\ f_3(x,y) &= x^4+\tfrac{1}{3}y^3-4y-2, & f_4(x,y) &= x^3+xy^2-x^2y-y^3. \end{aligned}$$

Pour chaque fonction, montrer que les extrema locaux ne sont pas globaux.

Exercice 2. Déterminer les extrema locaux des fonctions suivantes sur leur domaine de définition:

$$f(x,y,z) = x+\frac{y^2}{4x}+\frac{z^2}{y}+\frac{2}{z}, \qquad g(x,y,z) = 8x^3+y^3-12xyz+10z^3-6z.$$

Exercice 3. Optimiser les fonctions suivantes sur leur domaine de définition:

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= x^4+2y^2+3z^2-yz-23y+4x-5 \\ g(x_1,\dots,x_n) &= \sum_{i=1}^n x_i \ln\left(\frac{1}{x_i}\right) \\ h(x_1,\dots,x_n) &= \prod_{i=1}^n x_i^{x_i} \text{ (on pourra utiliser la fonction ln)} \end{aligned}$$

Exercice 4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^4+y^4-(x-y)^2$.

a) Déterminer les extremums locaux de f sur $\mathbb{R}^2$.

b) Montrer que f admet un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ (on pourra montrer que f est coercive).

Exercice 5. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x,y,z) = x^4-2x^2y+2y^2-2yz+2z^2-4z+5$.

a) Déterminer les points critiques de f sur $\mathbb{R}^3$.

b) Montrer que l'expression $f(x,y,z)$ peut s'écrire sous forme d'une somme de carrés.

c) En déduire les extrema de f sur $\mathbb{R}^3$.

Exercice 6. Droite des moindres carrés. Soit n un entier, $n \geq 2$. On considère n points (x_i, y_i) de $\mathbb{R}^2$, pour $i = 1,\dots,n$, non tous égaux, et la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(a,b) = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2.$$

a) Vérifier que f n'admet qu'un seul point critique $(\hat{a},\hat{b})$ sur $\mathbb{R}^2$. Exprimer $\hat{b}$ en fonction de $\hat{a}$.

b) Montrer que f admet un minimum global sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 7. Soient f et g les fonctions définies par $f(x,y) = xy$ et $g(x,y) = \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\cdot$ En se ramenant à l'optimisation de fonctions d'une variable, déterminer

a) les extrema de f sur $\mathbb{R}^2$ puis sous la contrainte $g(x,y) = \dfrac{2}{3}$;

b) les extrema de g sur son domaine de définition puis sous la contrainte $f(x,y) = 9$.

TD 7. Optimisation sous contrainte

Exercice 1.

Déterminer les extrema locaux et globaux de la fonction f sous la contrainte $g = 0$ avec

$$\begin{array}{llllll}
\text{a)} & f(x,y) & = & -y\,, & g(x,y) & = & x^2+y^2-1\,;\\
\text{b)} & f(x,y) & = & x+y\,, & g(x,y) & = & \exp\Big(x^2+y^2-\frac{1}{4}\Big)-1\,.
\end{array}$$

Exercice 2.

Déterminer les extrema locaux et globaux de la fonction f sous la contrainte $g = 0$ avec

$$\begin{array}{llllll}
\text{a)} & f(x,y) & = & x+2y\,, & g(x,y) & = & x^2+xy+y^2+y-\dfrac{13}{9}\,;\\
\text{b)} & f(x,y) & = & x^2+y^2\,, & g(x,y) & = & 4x^2-y^2-16\,;\\
\text{c)} & f(x,y) & = & \ln(x-y)\,, & g(x,y) & = & x^2+y^2-2\,;
\end{array}$$

Exercice 3.

Reprendre l'exercice 7 de la feuille de TD 6 en utilisant la notion de lagrangien.

Exercice 4.

Déterminer les extrema locaux et globaux de la fonction f sous la contrainte $g = 0$ avec

$$\begin{array}{llllll}
\text{a)} & f(x,y) & = & xy\,, & g(x,y) & = & x^2+y^2-x-y\,;\\
\text{b)} & f(x,y) & = & \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\,, & g(x,y) & = & \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}-\dfrac{1}{2}\,;\\
\text{c)} & f(x,y) & = & x^3+y^3\,, & g(x,y) & = & x^2+y^2-1\,.
\end{array}$$

Exercice 5.

Déterminer les extrema locaux et globaux de la fonction f sous la contrainte $g = 0$ avec

$$\begin{array}{llllll}
\text{a)} & f(x_1,\ldots,x_n) & = & \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i \ln x_i\,, & g(x_1,\ldots,x_n) & = & \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i-1\,;\\
\text{b)} & f(x_1,\ldots,x_n) & = & \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i^2\,, & g(x_1,\ldots,x_n) & = & \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i-1\,;\\
\text{c)} & f(x_1,\ldots,x_n) & = & \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i\,, & g(x_1,\ldots,x_n) & = & \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i^2-1\,.
\end{array}$$

Donner le lien entre l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le résultat des questions b) et c).

Exercice 6.

a) Soit E le sous-ensemble $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; x\geq 0, y\geq 0, x+y\leq 1\}$ de $\mathbb{R}^2$.

Déterminer les extrema globaux sur E de la fonction f définie par

$$f(x,y) = x^2-2y^2-5xy.$$

b) Même question avec $f(x,y) = 4x^2+5y^2+6xy-6x-6y+3$.

c) Même question avec $E = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2; x^2+y^2-2\leq 0\}$ et $f(x,y) = xy$.

Exercice 7. Déterminer les extrema locaux et globaux de la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sous les contraintes $g_1(x,y,z) = g_2(x,y,z) = 0$ avec

$$\begin{array}{lllllllll}
\text{a)} & f(x,y,z) & = & z\,, & g(x,y,z) & = & x^2+y^2-2\,, & g_2(x,y,z) & = & x+y+z;\\
\text{b)} & f(x,y,z) & = & x^2+y^2+z^2\,, & g(x,y,z) & = & x^2+y^2+2z-6\,, & g_2(x,y,z) & = & x-y+z;
\end{array}$$