

Examen, lundi 25 janvier 2010.  
Durée : 2 heures.

**Tous** les appareils électroniques et les documents sont interdits. Les solutions devront être rédigées de manière rigoureuse. Lorsque des résultats du cours seront invoqués, ils devront clairement être énoncés.

### 1. Questions de cours.

1. Donner la définition d'un espace euclidien.
2. Donner la définition de la matrice d'une forme bilinéaire dans une base.
3. Énoncer le théorème de diagonalisation d'une matrice symétrique réelle.
4. Montrer qu'une forme bilinéaire est symétrique si et seulement si sa matrice dans une base est symétrique.

### 2. Exercice.

On se place dans l'espace euclidien  $E = \mathbb{R}^3$ , et on introduit les vecteurs  $v_1, v_2$  par :

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v_2 := \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Soit  $F$  le sous-espace engendré par  $\{v_1, v_2\}$ .

1. Donner une base orthonormée de  $F$ .
2. Donner une base orthonormée de  $F^\perp$ . En déduire une base orthonormée de  $E$ , qui contient une base orthonormée de  $F$ .
3. Déterminer le projeté orthogonal sur  $F$  du vecteur

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

### 3. Exercice.

1. Soit  $A$  la matrice suivante :

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Montrer que le polynôme caractéristique de  $A$  est

$$\chi_A(X) = -X^3 + 5X^2 + X - 5.$$

(b) Déterminer les racines de ce polynôme caractéristique (on pourra trouver deux racines particulières d'écriture simple).

(c) Diagonaliser la matrice  $A$ .

2. Soit  $B$  la matrice suivante :

$$B := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Déterminer le polynôme caractéristique de  $B$  ainsi que les racines de celui-ci.

(b) Si  $B$  était diagonalisable, quelle serait la matrice diagonale en question ? En déduire que  $B$  n'est pas diagonalisable.

#### 4. Exercice.

Effectuer la réduction de Gauss puis donner la signature des formes quadratiques suivantes :

$$Q_1(X, Y, Z) = X^2 + 2Y^2 + 3Z^2 - 2XY - 4XZ - 2YZ,$$

$$Q_2(X, Y, Z) = X^2 + 5Y^2 + 3Z^2 + 4XY + 2XZ,$$

$$Q_3(X, Y, Z, W) = X^2 + Y^2 + 2XY + 2YZ.$$

On précisera à chaque fois si la forme quadratique est positive, définie positive, négative ou définie négative.

#### 5. Exercice.

Soient

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

des vecteurs colonnes de  $\mathbb{R}^n$ , qu'on munira du produit scalaire usuel. On cherche à écrire une relation approximative

$$y_i \simeq ax_i + b,$$

pour des coefficients réels  $a$  et  $b$ , en utilisant la méthode des moindres carrés. Soit

$$U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On suppose que  $U$  et  $X$  ne sont pas colinéaires.

1. Montrer que  $a$  et  $b$  minimisent

$$J(a, b) := \sum_{i=1}^n |ax_i + b - y_i|^2,$$

si et seulement si, le vecteur  $aX + bU$  est le projeté orthogonal de  $Y$  sur le sous-espace  $F$  engendré par  $X$  et  $U$ . En déduire l'existence et l'unicité d'un couple, que l'on notera  $(\bar{a}, \bar{b})$ , qui minimise  $J$ .

2. On note  $\bar{X}$  et  $\bar{Y}$  les réels suivants

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \langle X, U \rangle \text{ et } \bar{Y} = \frac{1}{n} \langle Y, U \rangle.$$

Montrer que  $\bar{a}$  et  $\bar{b}$  vérifient

$$\bar{b} = \bar{Y} - \bar{a}\bar{X} \text{ et } \langle (Y - \bar{Y}U) - \bar{a}(X - \bar{X}U), (X - \bar{X}U) \rangle = 0.$$

3. En déduire une formule pour  $\bar{a}$  et  $\bar{b}$ .
4. Un médecin imagine que le poids des enfants à un âge donné doit croître, grossièrement, proportionnellement à leur taille. Il cherche donc une relation mathématique approximative du type

$$\text{Poids en kg} \simeq a + b \times \text{Taille en cm},$$

obtenue par moindres carrés. Afin de calculer  $a$  et  $b$ , le médecin mesure 4 enfants (ce qui est peu, mais le médecin ne dispose pas de calculatrice et ne souhaite pas faire de calculs trop longs), tous volontaires et âgés de 6 ans. Il obtient le tableau suivant :

Enfant	1	2	3	4
Poids (en kg)	25	22	17	24
Taille (en cm)	121	123	110	118

Quelles valeurs de  $a$  et  $b$  trouve-t-il?

★

**Barème indicatif :** 1 : 4 points,  
 2 : 4 points,  
 3 : 4,5 points,  
 4 : 3 points,  
 5 : 4,5 points.