

Examen 2009-2010, deuxième session. Durée : 2 heures.

Tous les appareils électroniques et les documents sont interdits. Les solutions devront être rédigées de manière rigoureuse. Lorsque des résultats du cours seront invoqués, ils devront être explicitement cités.

1. Questions de cours.

1. Donner la définition d'un produit scalaire (réel).
2. Définir la matrice d'une forme quadratique.
3. Montrer que dans un espace euclidien, si p est un endomorphisme vérifiant $p \circ p = p$ et si en plus $Im(p) \perp Ker(p)$ alors p est la projection orthogonale sur $Im(p)$.
4. Montrer que dans un espace euclidien E , lorsque F est un sous-espace vectoriel, on a $E = F \oplus F^\perp$.

2. Exercice.

Appliquer le procédé de Gram-Schmidt au triplet de vecteurs suivant :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(On vérifiera auparavant que l'on part bien d'une base de \mathbb{R}^3 .)

3. Exercice.

1. Soit A la matrice suivante :

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Déterminer le polynôme caractéristique de A .
 - (b) Déterminer les racines de ce polynôme caractéristique (on pourra trouver une racine particulière d'écriture simple).
 - (c) Diagonaliser la matrice A (en donnant la matrice diagonale et la matrice de passage).
2. Soit B la matrice suivante :

$$B := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Calculer B^2 et B^3 .
- (b) La matrice B est-elle diagonalisable ?

4. Exercice.

Effectuer la réduction de Gauss puis donner la signature des formes quadratiques suivantes :

$$Q_1(X, Y, Z) = X^2 + 2Y^2 + 2XY + 4XZ,$$

$$Q_2(X, Y, Z) = 2X^2 - 2Y^2 + 3Z^2 + 4XY + 4XZ,$$

$$Q_3(X, Y, Z) = 18X^2 + 2Y^2 + Z^2 - 6XZ + 2YZ.$$

Préciser à chaque fois (**en le justifiant**) si la forme quadratique est positive/définie positive/négative/définie négative **ou pas**.

5. Exercice.

On se donne trois points du plan \mathbb{R}^2 de coordonnées respectives (a_1, b_1) , (a_2, b_2) et (a_3, b_3) . On cherche un point dans le plan qui soit « raisonnablement » proche des trois. On choisit pour cela le critère suivant : on cherche à déterminer le point de coordonnées (α, β) qui minimise la somme des distances aux trois points au carré, c'est-à-dire qui minimise :

$$C(\alpha, \beta) := \sum_{i=1}^3 (|\alpha - a_i|^2 + |\beta - b_i|^2).$$

On introduit les vecteurs de \mathbb{R}^6 suivants : $v := {}^t(1, 0, 1, 0, 1, 0)$ et $w := {}^t(0, 1, 0, 1, 0, 1)$ et $z := {}^t(a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3)$.

1. Montrer que

$$C(\alpha, \beta) = \|\alpha v + \beta w - z\|^2,$$

où la norme est la norme euclidienne usuelle de \mathbb{R}^6 .

2. En déduire qu'il existe un unique couple $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ qui minimise $C(\alpha, \beta)$ et déterminer $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ en fonction de (a_1, b_1) , (a_2, b_2) et (a_3, b_3) .
3. Comment interprétez-vous géométriquement ce couple $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$?

★

Barème indicatif :

- 1 : 5 points,
- 2 : 2,5 points,
- 3 : 5,5 points,
- 4 : 3 points,
- 5 : 4 points.