Université Paris Dauphine
DU MI2E
Algèbre linéaire 3

Examen, mardi 25 janvier 2011.
Durée : 2 heures.

Tous *les appareils électroniques et les documents sont interdits. Les solutions devront être rédigées de manière rigoureuse. Lorsque des résultats du cours seront invoqués, ils devront clairement être énoncés.*

1. Questions de cours.

1. Donner la définition d'une projection orthogonale dans un espace euclidien.
2. Donner la définition de la signature d'une forme quadratique.
3. Enoncer le théorème de diagonalisation des matrices symétriques.
4. Montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz (dans le cas réel).

2. Exercice.

On se place dans l'espace euclidien $E = \mathbb{R}^4$, et on introduit le sous-espace vectoriel suivant :

$$F := \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x + y + z + t = x - y + z - t = 0\}.$$

1. Montrer que $\dim(F) = 2$ et en donner une base.
2. Montrer que $(1, 1, 1, 1)$ et $(1, -1, 1, -1)$ appartiennent à $F^\perp$ et en forment une base. Donner une base orthonormée de $F^\perp$.
3. Ecrire la matrice de la projection orthogonale sur $F^\perp$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$. En déduire la matrice de la projection orthogonale sur F.
4. Soit $x = (1, 2, 3, 4)$. Calculer
$$\inf_{w \in F} \|w - x\|.$$

3. Exercice.

1. Soit A la matrice suivante :
$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$
   (a) Montrer que le polynôme caractéristique de A est
$$\chi_A(X) = -X^3 + 3X^2 + 6X - 8.$$
   (b) Déterminer les racines de ce polynôme caractéristique.

(c) Diagonaliser la matrice A. (On déterminera une matrice diagonale et une matrice de passage, on ne demande pas l'inverse de celle-ci ici).

2. Soit $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice telle que $B^3 = 0$ (on dit que B est *nilpotente*).
   (a) On suppose que B est diagonalisable, appelons Δ la matrice diagonale correspondante. Déterminer Δ^3, puis Δ. En déduire que si B est nilpotente et diagonalisable, alors on a nécessairement $B = 0$.
   (b) Montrer que la matrice
   $$C := \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   n'est pas diagonalisable.

4. Exercice.

Effectuer la réduction de Gauss puis donner la signature des formes quadratiques suivantes. On précisera à chaque fois si la forme quadratique est positive, définie positive, négative ou définie négative. (On citera éventuellement la propriété utilisée.)

$$Q_1(X,Y,Z) = X^2 + 2Y^2 - 7Z^2 - 4XY + 8XZ,$$
$$Q_2(X,Y,Z) = X^2 + 5Y^2 + 6Z^2 + 4XY - 2XZ,$$
$$Q_3(X,Y,Z) = X^2 + (1+\alpha)Y^2 + (2+\alpha)Z^2 + 2XY - 2XZ + (2\alpha - 2)YZ.$$

Pour Q_3, on distinguera selon les valeurs du paramètre réel α.

5. Exercice.

Dans cet exercice, $E := \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On rappelle que pour tout $A = (a_{ij})_{i,j=1,2} \in E$, on a
$$\mathrm{tr}({}^tAA) = a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{21}^2 + a_{22}^2.$$
et que l'application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ qui à (A, B) associe $\mathrm{tr}({}^tAB)$ est un produit scalaire sur E.

1. Appliquer le procédé de Gram-Schmidt à la famille
$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$
2. Soit F le sous-espace de E composé des matrice de trace nulle.
   (a) Montrer que
   $$\mathrm{Id} \in F^\perp.$$
   (b) Montrer que pour tout $A \in E$, il existe un unique $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{tr}(A - \lambda \mathrm{Id}) = 0$, et en déduire que $E = F \oplus \mathbb{R}\,\mathrm{Id}$ (où $\mathbb{R}\,\mathrm{Id}$ est la droite vectorielle engendrée par Id) et que $\dim F = 3$.
   (c) En déduire une expression simple de $P_F(A)$ pour $A \in E$.

⋆

Barème **<u>indicatif</u>** : 1 : 4 points, 2 : 4,5 points, 3 : 5 points, 4 : 3 points, 5 : 3,5 points.