Université Paris Dauphine
DE MI2E
Algèbre linéaire 3

Partiel, mardi 16 novembre 2010.
Durée : 2h.

Tous *les appareils électroniques et les documents sont interdits. Les solutions devront être rédigées de manière rigoureuse. En particulier, lorsque des résultats du cours seront invoqués, ils devront clairement être énoncés.*

1. Questions de cours.

1. Définir une famille libre et une famille génératrice de vecteurs dans un espace vectoriel.
2. Donner la définition d'une norme.
3. Citer le théorème de la base incomplète.
4. Donner la démonstration qu'une famille de vecteurs orthogonaux deux à deux et tous non nuls est libre.

2. Exercice

1. Soit E l'espace $\mathbf{R}^3$. Soient les parties suivantes de E :

   $$E_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in E \ / \ x_1 + x_2 x_3 = 0\}, \quad E_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in E \ / \ |x_1 - x_2| + |x_1 - x_3| = 0\}.$$

   Indiquer lesquels sont des sous-espaces vectoriels de E. On expliquera à chaque fois pourquoi il s'agit d'un sev ou pourquoi ce n'en n'est pas un.
2. Soit E l'espace $\mathbf{R}^2$. Soient les applications suivantes de $E \times E$ dans $\mathbf{R}$:

   $$a_1 : ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto x_1 y_1, \quad a_2 : ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto x_1 x_2 + y_1 y_2,$$
   $$a_3 : ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto x_1 y_1 + (x_1 + y_1)(x_2 + y_2).$$

   Indiquer lesquelles sont des produits scalaires. On justifiera rapidement à chaque fois.
3. Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel. Montrer que l'ensemble des formes bilinéaires sur $E \times E$ est un sous espace vectoriel de l'espace $\mathcal{A}(E \times E; \mathbf{R})$ des applications de $E \times E$ dans $\mathbf{R}$. L'ensemble des produits scalaires sur E est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}(E \times E; \mathbf{R})$?

3. Exercice.

Effectuer le procédé de Gram-Schmidt sur les vecteurs de $\mathbf{R}^3$ suivants :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

On présentera les calculs en détail.

4. Exercice.

Soit E l'espace des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 2

1. Justifier que E est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel, en donner une base et la dimension.
2. On munit E de la forme suivante :
$$\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(x)Q(x)\,dx.$$
Justifier que $\langle .,. \rangle$ est un produit scalaire sur E.
3. Justifier que pour tous réels a et b,
$$\left(\int_0^1 (ax^2+bx)\,dx\right)^2 \leq \frac{1}{3}\left(\int_0^1 (a^2x^2+2abx+b^2)\,dx\right).$$
4. Calculer la base orthonormée obtenue en appliquant le procédé de Gram-Schmidt à la famille $(1, X, X^2)$.

5. Exercice.

Soit E un espace vectoriel réel.

1. La somme de deux normes sur E est-elle nécessairement une norme sur E ?
2. Le produit d'une norme sur E par un scalaire $\lambda \in \mathbf{R}$ est-il nécessairement une norme sur E ?
3. Montrer que l'application de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^+$, $(x, y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2} + |y|$ est une norme.
4. Montrer que cette norme ne provient pas d'un produit scalaire.

⋆

Barême <u>indicatif</u> : 1 : 4 points,
2 : 4 points,
3 : 3 points,
4 : 5 points,
5 : 4 points.