

TD 2. Formes quadratiques, diagonalisation

Exercice 1. On considère la forme quadratique définie sur \mathbb{R}^2 par : $q(x, y) = x^2 - 3xy + 4y^2$.

- 1) Quelle est la matrice de q dans la base canonique de \mathbb{R}^2 ?
- 2) Décomposer q en une combinaison linéaire de carrés de formes linéaires.

Exercice 2. Donner la signature et le rang des formes quadratiques suivantes :

- 1) $q(x, y, z, t) = xy + yz + zt + tx$ sur \mathbb{R}^4 ,
- 2) $h(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 - z^2 - 4xy - 2yz - 2xz$ sur \mathbb{R}^3 .

Exercice 3. Soit b un nombre réel, q la forme quadratique définie sur \mathbb{R}^3 par

$$q(x, y, z) = x^2 + (1 + b)y^2 + (1 + b + b^2)z^2 + 2xy - 2byz$$

et f la forme bilinéaire symétrique associée.

- 1) Décomposer q en une combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes.
- 2) Donner le rang et la signature de q suivant les valeurs de b .
- 3) Pour quelles valeurs de b , f définit-elle un produit scalaire ?

Exercice 4. Soit q la forme définie sur $\mathbb{R}^2[X]$ par : $q(P) = P(0)P(1)$.

- 1) Montrer que q est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^2[X]$.
- 2) Déterminer la matrice de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^2[X]$.
- 3) La forme q est-elle positive, négative ?
- 4) Déterminer une base (P_0, P_1, P_2) de $\mathbb{R}^2[X]$ telle que $q\left(\sum_{i=0}^2 a_i P_i\right) = a_0^2 - a_1^2$ et donner la signature de q .

Exercice 5. Soit q une forme quadratique *définie* sur le \mathbb{R} -espace vectoriel E . Montrer que q garde un signe constant sur E .

Exercice 6. Soit E un K -espace vectoriel.

- 1) Une forme bilinéaire f sur E est dite alternée si $f(x, x) = 0$ pour tout x . Montrer qu'une forme bilinéaire est alternée si et seulement si elle est antisymétrique.
- 2) Montrer que toute forme bilinéaire sur E s'écrit de manière unique comme la somme d'une forme bilinéaire symétrique et d'une forme bilinéaire antisymétrique.

Exercice 7. Des deux formes quadratiques suivantes sur \mathbb{R}^n , déterminer la matrice dans la base canonique et la signature. Sont-elles positives ? Négatives ?

- 1) $q((x_1, x_2, \dots, x_n)) = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j$,
- 2) $h((x_1, x_2, \dots, x_n)) = \sum_{i,j=1}^n j^2 x_i x_j$.

Exercice 8. Soit q la forme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $q(A) = \text{tr}(A^2)$.

- 1) Montrer que q est quadratique, et donner son noyau.
- 2) Montrer que la restriction de q au sous-espace des matrices symétriques (resp. antisymétriques) est définie positive (resp. négatives).
- 3) Donner une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans laquelle la matrice Q associée à q est diagonale, écrire Q et donner la signature de q .

Exercice 9. Soit la forme quadratique définie sur \mathbb{R}^3 par : $q(x, y, z) = 4x^2 + 2y^2 + 10z^2 + 2xy + 10xz - 2yz$.

- 1) Déterminer la matrice A de q dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .
- 2) Montrer par le théorème de Sylvester que q est une forme définie positive.
- 3) Etudier de même la forme $Q(x, y, z) = 4x^2 + 2y^2 + 9z^2 + 2xy + 10xz - 2yz$.

Exercice 10. Effectuer la réduction de Gauss puis donner la signature des formes quadratiques

$$Q_1(X, Y, Z) = X^2 + 2Y^2 + 3Z^2 - 2XY - 4XZ - 2YZ,$$

$$Q_2(X, Y, Z) = X^2 + 5Y^2 + 3Z^2 + 4XY + 2XZ,$$

$$Q_3(X, Y, Z, W) = X^2 + Y^2 + 2XY + 2YZ.$$

Préciser si ces formes sont positives, définies positives, négatives ou définies négatives.

Exercice 11. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.

- 1) Diagonaliser la matrice A .
- 2) Soit q la forme quadratique de matrice A dans la base canonique de \mathbb{R}^3 . Utiliser la question précédente pour trouver une base q -orthogonale et déterminer la signature de q .

Exercice 12. Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- 1) Diagonaliser la matrice A .
- 2) Déterminer les valeurs propres de B . Si B était diagonalisable, quelle serait la matrice diagonale en question ? En déduire que B n'est pas diagonalisable.

Exercice 13. Déterminer une base orthonormée formée de vecteurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Interpréter géométriquement l'endomorphisme qui dans la base canonique de \mathbb{R}^3 est représentée par A .

Exercice 14. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ fixés. Calculer A^n pour $n \in \mathbf{Z}$ et A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}.$$