

## Corrigé du devoir à la maison

### I. Exercice 8 de la feuille de TD du chapitre 2

1. On considère  $K$  le support de  $T$  et une fonction  $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$  qui vaut 1 sur  $K$  (l'existence d'une telle fonction est justifiée dans l'exercice 9 ci-dessous). Cette fonction est à support compact, notons  $\hat{K}$  son support. Pour une fonction test  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ , la fonction test  $\varphi(1 - \theta)$  est à support inclus dans  $K^c$  donc par définition du support de  $T$ , on a

$$\langle T, \varphi(1 - \theta) \rangle = 0.$$

D'où pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$  on a

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \varphi\theta \rangle.$$

Mais puisque la fonction  $\varphi\theta$  est toujours à support inclus dans le compact  $\hat{K}$  fixé, la définition d'une distribution pour  $T$  donne un entier  $p$  tel que sur  $\hat{K}$ ,  $T$  soit d'ordre  $p$ . Cela est donc vrai pour toutes les fonctions test.

2. Lorsqu'on ne précise pas de point pour une masse de Dirac, on suppose implicitement qu'elle est prise en 0. La suite  $T_n$  ne peut converger dans les distributions. En effet, le support de chaque distribution  $T_n$  est  $\{0\}$ , la limite, si elle existe, ne peut donc avoir pour support que  $\{0\}$ , c'est-à-dire un support compact. Mais d'après la construction de l'exercice 4 cette limite, si elle existe, est d'ordre infini. Nous aboutissons donc à une contradiction d'après la question précédente.

### II. Exercice 9 de la feuille de TD du chapitre 2

Le but de cet exercice est de montrer que les distributions dont le support est réduit à un point sont réduits aux exemples que l'on a déjà vus, c'est-à-dire les masses de Dirac et leurs dérivées au sens des distributions.

1. On construit une approximation de l'identité  $\phi_\varepsilon$  de la fonction suivante. Soit  $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ ,  $\phi \geq 0$ ,  $\text{supp } \phi \subset \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| \leq 1\}$  et  $\int_{\mathbb{R}^d} \phi(x) dx = 1$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ , on pose  $\phi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-d} \phi(\frac{x}{\varepsilon})$ . Alors,  $\phi_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ ,  $\phi_\varepsilon \geq 0$ ,  $\text{supp } \phi_\varepsilon \subset \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| \leq \varepsilon\}$  et  $\int_{\mathbb{R}^d} \phi_\varepsilon(x) dx = 1$ . On définit ensuite

$$\chi_\varepsilon(x) = (\phi_{\varepsilon/2} \star \mathbf{1}_{K_{\varepsilon/2}})(x) = \int_{\|y\| \leq \varepsilon/2} \phi_{\varepsilon/2}(y) \mathbf{1}_{K_{\varepsilon/2}}(x - y) dy$$

où  $\mathbf{1}_A$  est la partie indicatrice de l'ensemble  $A$ . Si  $x \in K$  et  $\|y\| \leq \varepsilon/2$ , alors  $x - y \in K_{\varepsilon/2}$ , donc

$$\int_{\|y\| \leq \varepsilon/2} \phi_{\varepsilon/2}(y) \mathbf{1}_{K_{\varepsilon/2}}(x - y) dy = \int_{\mathbb{R}^d} \phi_{\varepsilon/2}(y) dy = 1.$$

Donc,  $\chi_\varepsilon$  vaut bien 1 sur  $K$  et il est évident que  $0 \leq \chi_\varepsilon \leq 1$  sur  $\mathbb{R}^d$ . Si  $x \in \mathbb{R}^d \setminus K_\varepsilon$ , pour tout  $z \in K$ ,  $\|x - z\| > \varepsilon$ , donc, pour tout  $y$  tel que  $\|y\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$  et pour tout  $z \in K$ ,

$$\|x - y - z\| \geq \|x - z\| - \|y\| > \frac{\varepsilon}{2},$$

donc  $x - y \in \mathbb{R}^d \setminus K_{\varepsilon/2}$ . D'où  $\chi_\varepsilon(x) = 0$  :  $\chi_\varepsilon$  est  $C^\infty$  à support compact dans  $K_\varepsilon$ . Il reste maintenant à montrer la formule demandée pour tout  $x$  dans  $K_\varepsilon$ . Or, pour tout  $\alpha \in \mathbb{N}^d$  et pour tout  $x$  dans  $K_\varepsilon$ ,

$$\partial^\alpha \chi_\varepsilon(x) = (\partial^\alpha \phi_{\varepsilon/2}) \star \mathbf{1}_{K_{\varepsilon/2}} = \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{-|\alpha|} \int_{\|y\| \leq \varepsilon/2} (\partial^\alpha \phi)\left(\frac{2y}{\varepsilon}\right) \mathbf{1}_{K_{\varepsilon/2}}(x - y) \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{-d} dy,$$

et donc

$$|\partial^\alpha \chi_\varepsilon(x)| \leq c_\alpha \varepsilon^{-|\alpha|}$$

avec  $c_\alpha = 2^{|\alpha|} \int_{\|y\| \leq 1} |\partial^\alpha \phi(y)| dy$ .

2. La fonction  $\varphi$  étant nulle à l'ordre  $p$  sur  $K$ , l'estimation est triviale sur  $K$ . Soit maintenant  $x$  dans le domaine  $K_\varepsilon \setminus K$  de taille  $\varepsilon$ , alors il existe  $x_0$  dans  $K$  tel que  $\|x - x_0\| \leq \varepsilon$ . On écrit des formules de Taylor avec reste intégral successives pour obtenir

$$\text{pour tout } x \in K_\varepsilon \setminus K, \quad |\partial^\alpha \varphi(x)| \leq \varepsilon^{p-|\alpha|} \left( \sup_{|\beta|=p} \sup_{K_\varepsilon \setminus K} |\partial^\beta \varphi| \right).$$

En effet la formule est évidente pour tout  $\alpha$  tel que  $|\alpha| = p$ . Si  $|\alpha| = p - 1$  on utilise la formule de Taylor au premier ordre au point  $x_0$

$$\begin{aligned} \partial^\alpha \varphi(x) &= \partial^\alpha \varphi(x_0) + \int_0^1 (x - x_0) \cdot \partial^\beta \varphi(tx + (1-t)x_0) dt \\ &= \int_0^1 (x - x_0) \cdot \partial^\beta \varphi(tx + (1-t)x_0) dt \end{aligned}$$

avec  $|\beta| = p$ . On obtient alors la formule souhaitée pour tous les  $\alpha$  tels que  $|\alpha| = p - 1$ . On itère la même formule en décroissant progressivement la valeur de  $|\alpha|$  jusqu'à 0. D'où le résultat car pour tout  $\alpha \in \mathbb{N}^d$ ,

$$h(\varepsilon) := \left( \sup_{K_\varepsilon \setminus K} |\partial^\alpha \varphi| \right) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

On peut aussi raisonner de la façon suivante. Si  $|\alpha| = p - q$  avec  $1 \leq q \leq p$ , on écrit la formule de Taylor à l'ordre  $q$  pour  $\partial^\alpha \varphi$  :

$$\begin{aligned} \partial^\alpha \varphi(x) &= \sum_{|\beta| \leq q-1} \frac{1}{\beta!} (x - x_0)^\beta \cdot (\partial^{\alpha+\beta} \varphi)(x_0) \\ &\quad + \int_0^1 (1-t)^{q-1} \sum_{|\beta|=q} \frac{q}{\beta!} (x - x_0)^\beta \cdot (\partial^{\alpha+\beta} \varphi)(tx + (1-t)x_0) dt \\ &= \int_0^1 (1-t)^{q-1} \sum_{|\beta|=q} \frac{q}{\beta!} (x - x_0)^\beta \cdot (\partial^{\alpha+\beta} \varphi)(tx + (1-t)x_0) dt. \end{aligned}$$

3. L'égalité à démontrer vient de

$$\langle T, \varphi(1 - \chi_\varepsilon) \rangle = 0$$

par définition du support de  $T$ . Donc

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \chi_\varepsilon \rangle$$

et  $\varphi \chi_\varepsilon$  est une fonction  $C^\infty$  à support compact dans  $K_\varepsilon$ . On suppose maintenant que  $\varphi$  s'annule à l'ordre  $p$  sur  $K$ . Donc, c'est vrai aussi pour  $\varphi \chi_\varepsilon$  en vertu de la formule de Leibniz sur la dérivation d'un produit. Pour  $\varepsilon$  assez petit, disons  $\varepsilon \leq 1$ ,  $K_\varepsilon$  est contenu dans le compact fixe  $K_1$ . On en déduit en utilisant la définition de l'ordre  $p$ , la formule de Leibniz sur la dérivation d'un produit, et les questions 1 et 2,

$$|\langle T, \varphi \rangle| = |\langle T, \varphi \chi_\varepsilon \rangle| \leq C \sup_{|\alpha| \leq p} \sup_{x \in K_\varepsilon} |\partial^\alpha (\chi_\varepsilon \varphi)(x)| \leq C h(\varepsilon)$$

pour tout  $\varepsilon$  d'où le résultat.

4. Par la question précédente pour toute fonction  $\varphi$  dans  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ ,

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \chi \rangle$$

où  $\chi$  est une fonction à support compact quelconque, indépendante de  $\varphi$ , et qui vaut identiquement 1 sur un voisinage de 0. Par la formule de Taylor avec reste intégral on a

$$\varphi(x) \chi(x) = \sum_{k=0}^p \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^k \chi(x) + \psi(x),$$

avec  $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  nulle à l'ordre  $p$  sur  $\{0\}$ . Donc, pour toute fonction  $\varphi$  de  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ ,

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \chi \rangle = \sum_{k=0}^p \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} \langle T, x^k \chi \rangle.$$

En posant  $a_k = \frac{(-1)^k}{k!} \langle T, x^k \chi \rangle$ , on en déduit que

$$T = \sum_{k=0}^p a_k \delta_0^{(k)}.$$

### III. Exercice complémentaire

1. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$T_n = \sum_{j=1}^n \delta_{\frac{1}{j}} - n \delta_0 + \ln(n) \delta_0'$$

est une distribution sur  $\mathbb{R}$  comme combinaison linéaire finie de distributions. Soit  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ , alors grâce à la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 2, on peut écrire

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x \varphi'(0) + x^2 \psi(x)$$

avec  $\psi \in C^0(\mathbb{R})$  et  $\sup_{x \in \mathbb{R}} |\psi(x)| \leq C \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi''(x)|$ . Donc

$$\sum_{j=1}^n \varphi\left(\frac{1}{j}\right) = n\varphi(0) + \varphi'(0) \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} + \sum_{j=1}^n \frac{1}{j^2} \psi\left(\frac{1}{j}\right)$$

puis

$$\langle T_n, \varphi \rangle = \varphi'(0) \left( \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} - \ln(n) \right) + \sum_{j=1}^n \frac{1}{j^2} \psi\left(\frac{1}{j}\right).$$

Le premier terme converge vers  $C_0 \varphi'(0)$  et le deuxième terme converge vers  $\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^2} \psi\left(\frac{1}{j}\right)$  car  $\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^2}$  est absolument convergente.  $T$  est donc bien une distribution comme limite au sens des distributions de la suite de distributions  $T_n$ .

2. Si  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \setminus S)$ ,  $\langle T_n, \varphi \rangle = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . Donc  $\langle T, \varphi \rangle = 0$ . Ceci montre que le support de  $T$  est inclus dans  $S$ . Soit  $j \geq 1$ , on suppose par l'absurde que  $\frac{1}{j}$  n'appartient pas à  $S$ . Donc  $\frac{1}{j}$  est dans le plus grand ouvert de nullité de  $S$ . Pour toute fonction  $C^\infty$  à support compact sur un voisinage de  $\frac{1}{j}$ ,  $\langle T, \varphi \rangle = 0$ . On peut construire une fonction  $\varphi$   $C^\infty$  à support compact dans  $]\frac{1}{j-1}, \frac{1}{j+1}[$  qui vaut 1 en  $\frac{1}{j}$ . Alors  $\langle T, \varphi \rangle = 1 \neq 0$ , d'où la contradiction. Le support de  $T$  est un ensemble fermé donc il contient aussi 0 qui est la limite des  $\frac{1}{j}$  lorsque  $j$  tend vers  $+\infty$ . Finalement, le support de  $T$  est bien  $S = \left\{ 0, 1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots \right\}$ .

3. Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , l'existence d'une fonction  $\psi_k$  de  $\mathcal{D}(]\frac{1}{k+1}, 2[)$ , comprise entre 0 et 1 et valant 1 identiquement pour  $\frac{1}{k} \leq x \leq 1$  est justifiée dans l'exercice 9 de la planche de TD du chapitre 2. La suite  $(\varphi_k)_{k \geq 1}$  est obtenue en multipliant la fonction  $\psi_k$  par  $\frac{1}{\sqrt{k}}$ .

La convergence uniforme de la suite  $(\varphi_k)_{k \geq 1}$  vers 0 sur  $\mathbb{R}$  est immédiate.

Soit  $\alpha \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha \neq 0$  et soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . Pour tout  $j \geq k+1$ ,  $\partial^\alpha \varphi_k\left(\frac{1}{j}\right) = 0$  et  $\partial^\alpha \varphi_k(0) = 0$  car ces points sont hors du support de  $\varphi_k$ . Sur  $[\frac{1}{k}, 1]$   $\varphi_k$  est constante et  $C^\infty$  au voisinage de cet intervalle donc  $\partial^\alpha \varphi_k\left(\frac{1}{j}\right) = 0$  pour  $1 \leq j \leq k$ . Donc toutes les dérivées de  $\varphi_k$  sont nulles sur  $S$ .

Si  $j \geq k+1$ ,  $\varphi_k\left(\frac{1}{j}\right) = 0$  et si  $j \leq k$ ,  $\varphi_k\left(\frac{1}{j}\right) = \frac{1}{\sqrt{k}}$ , donc

$$\langle T, \varphi_k \rangle = \sum_{j=1}^k \frac{1}{\sqrt{k}} = \sqrt{k}.$$

et

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \langle T, \varphi_k \rangle = +\infty.$$

4. Soit  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  et soit  $K$  le support compact de  $\varphi$ . Dans la formule

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C(K) \sup_{|\alpha| \leq p(K)} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|,$$

qui exprime la continuité de la distribution  $T$ , on ne peut pas remplacer  $\sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|$  par  $\sup_{x \in S} |\partial^\alpha \varphi(x)|$ . (En revanche on peut remplacer par  $\sup_{x \in S_\varepsilon} |\partial^\alpha \varphi(x)|$  pour n'importe quel  $\varepsilon > 0$ , où  $S_\varepsilon$  est défini comme dans l'exercice 9 ci-dessus).