

**Correction de l'examen partiel :
Jeudi 29 mars 2007, durée 2h**

Moyenne sur 26 notes : 9,9.

I. Questions de cours

A. **Barème** : 1 point chacune des deux définitions.

Une petite erreur courante dans les copies : “ $T(x)$ ” n’a pas de sens pour une distribution T générale qui n’est pas une fonction, et la notation intégrale non plus.

B. **Barème** : 1,5 points chacune des deux preuves.

II. Exercices sur le Chapitre 2

1. **Barème** : 2 points pour chacune des deux limites.

Pour le (a), la limite est 0 et s’obtient pour une intégration par partie : pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, par convergence dominée

$$\int \cos(nx) \varphi(x) dx = - \int \frac{\sin(nx)}{n} \varphi'(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Pour le (b), la limite est la dérivée du Dirac : par intégration par parties et changement de variable

$$\int n^3 x e^{n^2 x^2} \varphi(x) dx \stackrel{X=nx}{=} - \int \frac{e^{X^2}}{2} \varphi' \left(\frac{X}{n} \right) dX \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \left(- \int \frac{e^{X^2}}{2} dX \right) \varphi'(0)$$

soit

$$g_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \left(- \int \frac{e^{X^2}}{2} dX \right) \delta'_0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

Une erreur très courante : la fonction g_n converge bien vers 0 pour tout $x \neq 0$, mais le contrôle n’est pas uniforme (regarder en $x = 1/n$ et $x = -1/n$ et regarder la valeur de l’intégrale pour les $x \geq 0$ et pour les $x \leq 0$), ce qui empêche d’appliquer le théorème de convergence dominée et explique pourquoi on ne trouve pas 0 comme limite.

2. (a) **Barème** : 2 points.

Pour une fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, il faut utiliser le support compact de φ pour déduire que la série

$$\sum_{n \geq 0} \langle \delta_n^{(n)}, \varphi \rangle$$

est stationnaire à partir d'un certain rang, donc convergente.

(b) **Barème** : 2 points.

Supposer que la limite S est d'ordre fini N , et considérer une fonction test $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ qui vaut 1 sur $[N + 3/4, N + 5/4]$ et zéro hors de $[N + 1/2, N + 3/2]$. Alors $S\chi = \delta_{N+1}^{(N+1)}$, et la multiplication avec une fonction C^∞ ne pouvant que diminuer l'ordre, cela contredit l'indication.

(c) Non traité.

3. (a) **Barème** : 2 points.

En notant ϕ_ε l'approximation de l'unité usuelle, définir

$$\chi_\varepsilon = \phi_{\varepsilon/2} * \mathbf{1}_{K_{\varepsilon/2}}$$

et vérifier sur la formule le contrôle sur les dérivées.

(b) **Barème** : 3 points.

La fonction φ étant nulle à l'ordre p sur K , l'estimation est triviale sur K , et sur le domaine $K_\varepsilon \setminus K$ de taille ε , écrire des formules de Taylor successives à partir d'un point de K pour obtenir

$$|\partial^\alpha \varphi(x)| \leq \varepsilon^{p-|\alpha|} \left(\sup_{K_\varepsilon \setminus K} |\partial^\alpha \varphi| \right)$$

d'où le résultat car

$$h(\varepsilon) := \left(\sup_{K_\varepsilon \setminus K} |\partial^\alpha \varphi| \right) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

(c) **Barème** : 2 points.

L'égalité à démontrer vient de

$$\langle T, \varphi(1 - \chi_\varepsilon) \rangle = 0$$

par définition du support, et on en déduit en utilisant la définition de l'ordre p , et la formule de Leibniz sur la dérivation d'un produit

$$|\langle T, \varphi \rangle| = |\langle T, \varphi \chi_\varepsilon \rangle| \leq C h(\varepsilon)$$

pour tout ε d'où le résultat.

(d) **Barème** : 3 points.

Montrer en utilisant un développement de Taylor que toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ s'écrit

$$\varphi = \sum_{k=0}^p \varphi^{(k)}(0) \theta_k + \psi, \quad \theta_k, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

avec $\theta_k^{(j)}(0) = \delta_{kj}$ pour $0 \leq k, j \leq p$ et ψ nulle à l'ordre p sur $\{0\}$, et en déduire le résultat.

III. Exercices sur le Chapitre 3

1. (a) **Barème** : 2 points.

Si $T = T_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est associée à une fonction, il faut par cohérence que

$$\Omega_\lambda T_f = T_{\Omega_\lambda f}.$$

On trouve donc par changement de variable qu'il faut que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \langle \Omega_\lambda T, \varphi \rangle := \langle T, \lambda^d \Omega_{1/\lambda} \varphi \rangle$$

pour retrouver la propriété. Ceci définit bien $\Omega_\lambda T$ (pour tout $\lambda > 0$, si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ alors $\lambda^d \Omega_{1/\lambda} \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $\Omega_\lambda T$ ainsi défini est bien une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ qui vérifie la propriété de continuité, qui est définie de manière unique. . .).

- (b) (i) **Barème** : 2 points. Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\langle \Omega_\lambda \delta_0, \varphi \rangle = \langle \delta_0, \lambda^d \Omega_{1/\lambda} \varphi \rangle = \varphi(0/\lambda) = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle.$$

- (ii) **Barème** : 2 points.

Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\langle \Omega_\lambda \partial^\alpha T, \varphi \rangle = \lambda^d \langle \partial^\alpha T, \Omega_{1/\lambda} \varphi \rangle = \lambda^d (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha (\Omega_{1/\lambda} \varphi) \rangle$$

et un calcul évident donne

$$\partial^\alpha (\Omega_{1/\lambda} \varphi) = \lambda^{-|\alpha|} \Omega_{1/\lambda} (\partial^\alpha \varphi)$$

d'où

$$\begin{aligned} \langle \Omega_\lambda \partial^\alpha T, \varphi \rangle &= \lambda^{d-|\alpha|} (-1)^{|\alpha|} \langle T, \Omega_{1/\lambda} (\partial^\alpha \varphi) \rangle = \lambda^{-|\alpha|} (-1)^{|\alpha|} \langle \Omega_\lambda T, \partial^\alpha \varphi \rangle \\ &= \lambda^{m-|\alpha|} (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle = \lambda^{m-|\alpha|} \langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

- (c) (i) **Barème** : 2 points.

Pour $x \neq 0$ le calcul donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln \|x\|}{\partial x_1} &= \frac{x_1}{\|x\|^2}, & \frac{\partial^2 \ln \|x\|}{\partial x_1^2} &= \frac{x_2^2 - x_1^2}{\|x\|^4} \\ \frac{\partial \ln \|x\|}{\partial x_2} &= \frac{x_2}{\|x\|^2}, & \frac{\partial^2 \ln \|x\|}{\partial x_2^2} &= \frac{x_1^2 - x_2^2}{\|x\|^4} \end{aligned}$$

d'où $\Delta \ln \|x\| = 0$.

- (ii) **Barème** : 3 points.

D'après la question précédente, le support de $T = \Delta \ln \|\cdot\|$ est réduit à $\{0\}$, donc en utilisant le résultat démontré II.3.(d), on en déduit

$$T = \sum_{k=0}^K a_k \delta_0^{(k)}, \quad (a_k)_{k=0, \dots, K} \in \mathbb{R}.$$

Puis on vérifie sur les calculs du (i) que $\partial T / \partial x_1$ et $\partial T / \partial x_2$ sont homogène de degré 1. Donc d'après le (b), T est homogène de degré 0, d'où finalement $T = C \delta_0$.

(iii) **Barème** : 3 points.

Calculer $\langle T, \varphi \rangle$ avec $\varphi(x) = e^{-\|x\|^2/2}$:

$$C = \langle T, \varphi \rangle = - \int \nabla \ln \|x\| \nabla \varphi(x) dx$$

car $\nabla \ln \|x\|$ est une vraie fonction, et donc

$$C = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{x \cdot x}{\|x\|^2} e^{-\|x\|^2/2} dx = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\|x\|^2/2} dx = 2\pi.$$

2. (a) (i) TD. **Barème** : 1 points.

(ii) TD. **Barème** : 2 points.

(b) (i) TD. **Barème** : 2 points.

(ii) **Barème** : 3 points (2 points pour $xT = 0$, 1 point pour $xT = 1$). La première question est traitée en TD, pour $xT = 1$, utiliser la solution particulière du (a) (ii) pour se ramener au cas homogène $xT = 0$, la solution étant la somme de la solution particulière et des solutions homogènes.

(iii) **Barème** : 2 points.

Vérifier par un développement de Taylor que toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ s'écrit

$$\varphi = \chi_0 \varphi(0) + \chi_1 \varphi(1) + x(x-1)\psi$$

avec $\chi_0, \chi_1, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $\chi_0(0) = \chi_1(1) = 1$ et $\chi_1(0) = \chi_0(1) = 0$. D'où (la réciproque est immédiate)

$$T = C_0 \delta_0 + C_1 \delta_1, \quad C_0, C_1 \in \mathbb{R}.$$

3. (a) **Barème** : 2 points.

Dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ on peut appliquer la transformation de Fourier : $\hat{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ vérifie

$$\hat{T} = -\frac{1}{a^2 + |\xi|^2}$$

d'où en utilisant l'indication

$$T = g_0(x) = -\frac{e^{-a|x|}}{2a}.$$

(b) **Barème** : 2 points.

La solution particulière précédente permet de se ramener au cas homogène :

$$T(x) = g_0(x) + A e^{ax} + B e^{-ax}, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

(c) **Barème** : 3 points.

On cherche d'abord une solution particulière : en prenant la transformation de Fourier

$$\hat{T} = -\frac{\hat{f}}{a^2 + |\xi|^2}$$

d'où $T = f * g_0$. Il faut ensuite ajouter les solutions homogènes...