Université de Paris Dauphine
Année universitaire 2006-2007, M1 MMD
Distributions, ÉDP, modèles de Black et Scholes

Examen partiel :
Jeudi 10 avril 2007, durée 2h, pas le droit aux notes de cours

I. Questions de cours (6 points)

A. Définitions

1. Donner la définition d'une distribution sur $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}^*$.
2. Donner la définition de la dérivée d'ordre $\alpha \in \mathbb{N}^d$ d'une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, ainsi que la définition du produit $(f\,T)$, pour $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d;\mathbb{R})$ et $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.

B. Preuves

1. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}^d$, positives, d'intégrale 1, et s'annulant chacune sur le complémentaire d'une boule de centre 0 et de rayon $\alpha_n > 0$, avec
$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 0.$$
Montrer que la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge vers la masse de Dirac en zéro δ_0 dans l'espace des distributions $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.
2. Donner la preuve de la proposition suivante : si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vérifie $T' = 0$, alors T est une constante (plus précisément, c'est la distribution associée à la fonction constante qui est bien L^1_{loc}).

II. Exercices sur le Chapitre 2

1. (4 points) Calculs de limites de distributions
Calculer la limite dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ si elle existe des suites de fonctions suivantes :
$$(a) \quad f_n(x) = \sin(n\,x), \qquad (b) \quad g_n(x) = \frac{2\,n^3\,x}{(1+n^2\,x^2)^2}.$$
2. Exercice sur la valeur principale
   (a) (2 points) On pose, pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,
   $$\left\langle \mathrm{v}p.\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x|>\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx.$$
   Montrer que v$p.(1/x)$ est une distribution sur $\mathbb{R}$ (on l'appelle *valeur principale* de $1/x$).

(b) (1 point) Quel est l'ordre de v$p.(\frac{1}{x})$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^*)$?

(c) On désire calculer l'ordre de v$p.(\frac{1}{x})$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

a) (1 point) Montrer que l'ordre de v$p.(\frac{1}{x})$ est au plus 1.

b) (1 point) Calculer la dérivée dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de la fonction localement intégrable $x \mapsto \ln|x|$.

(d) a) (2 points) Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une constante réelle A telle que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\int_{|x|>\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx = \frac{A}{\varepsilon} + R_\varepsilon^\varphi,$$

où R_ε^φ admet une limite dans $\mathbb{R}$ lorsque ε tend vers 0.

b) (2 points) On définit la *partie finie* de $1/x^2$ de la façon suivante

$$\left\langle \mathrm{P}f.\left(\frac{1}{x^2}\right), \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} R_\varepsilon^\varphi.$$

Montrer que $\mathrm{P}f.(\frac{1}{x^2})$ est une distribution d'ordre 2 et que

$$\mathrm{P}f.\left(\frac{1}{x^2}\right) = -\mathrm{v}p.\left(\frac{1}{x}\right)'.$$

III. Exercices sur le Chapitre 3

1. (4 points) <u>Exercice sur la formule des sauts</u>
   Calculer dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \lambda\right) \left(H(x)\, e^{\lambda x}\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \omega^2\right) \left(\frac{\sin(\omega x)}{\omega}\, H(x)\right),$$

   où H désigne la fonction de Heavyside définie en cours.

2. <u>Valeur principale et multiplication par une fonction</u>

   (a) (i) (1 point) Soient $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $a \in \mathbb{R}^d$. Montrer que $f\,\delta_a = f(a)\,\delta_a$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.

   (ii) (1 point) Montrer que $x\,\delta_0' = -\delta_0$ et que

$$x\,\mathrm{v}p.\left(\frac{1}{x}\right) = 1 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

   (b) (i) (2 points) Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, tels que

$$f\,\mathrm{v}p.\left(\frac{1}{x}\right) = \lambda\,\mathrm{v}p.\left(\frac{1}{x}\right) + g.$$

   (ii) (2 points) Résoudre $x\,T = 0$, $x\,T = 1$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

   (iii) *(**Difficile**) Résoudre $x\,(x-1)\,T = 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.*

3. <u>Utilisation de la transformation de Fourier</u>

   (a) (2 points) Résoudre dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ l'équation $\Delta u = u$.

(b) *(**Difficile**) Résoudre dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ l'équation $\Delta u = 0$.*

IV. Exercices sur le Chapitre 4

1. Un cas de transport linéaire à coefficients variables explicite
   (a) (3 points) Donner l'expression des solutions classiques pour l'équation

$$\partial_t u + x\,\partial_x u = 0,$$

   avec la donnée initiale $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$. On donnera les équations des caractéristiques, leur solution, et on déduira la formule recherchée.
   (b) (3 points) Rappeler la définition des solutions faibles pour cette équation, et vérifier que lorsque $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$, l'expression trouvée précédemment continue d'avoir un sens, et est solution faible.
2. (3 points) On considère l'équation de transport linéaire à coefficient constant

$$\partial_t u + c\,\partial_x u = 0,$$

   pour $c \in \mathbb{R}$, et une donnée initiale $u_0 \in C^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty$. Montrer que si u est solution faible sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est C^1 sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, alors c'est une solution forte.