Université de Paris Dauphine
Année universitaire 2007-2008, M1 MMD
Distributions, ÉDP, modèles de Black et Scholes

Examen de rattrapage
Vendredi 29 Août 2008, durée 2h, pas le droit aux notes de cours

Exercice 1.

1. (Définitions)
   (a) Donner la définition d'une distribution sur $\mathbb{R}^d$, avec $d \in \mathbb{N}^*$, puis de sa dérivée dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.
   (b) Donner la définition de la convolution entre une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et une fonction C^∞ à support compact $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, puis entre $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $U \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ (les distributions à support compact).

2. (Dilatations et distributions homogènes)
   (a) Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction. On définit, pour $\lambda > 0$, la nouvelle fonction $\Omega_\lambda f$ par
   $$\forall\, x \in \mathbb{R}^d, \quad \Omega_\lambda f(x) = \lambda^d\, f(\lambda x).$$
   Étendre l'opération Ω_λ aux distributions $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ (c'est-à-dire donner une définition valable pour toute distribution). Le mot "étendre" implique que la définition pour les distributions doit coïncider avec celle ci-dessus pour les fonctions lorsque la distribution correspond à une fonction $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$.
   (b) On dit qu'une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ est homogène de degré $m \in \mathbb{R}$ si et seulement si
   $$\forall\, \lambda > 0, \quad \Omega_\lambda T = \lambda^m\, T.$$
   (i) Montrer que la masse de Dirac en 0 est homogène de degré 0.
   (ii) Montrer que si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ est homogène de degré m, alors pour tout multi-indice α, $\partial^\alpha T$ est homogène de degré $m - |\alpha|$.
   (c) **Application (difficile)** *: on veut calculer $\Delta(\ln \|x\|)$, $x \in \mathbb{R}^2$. On rappelle que pour une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^d$, le Laplacien de f est défini par :*
   $$\Delta f(x) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x).$$
   (i) Calculer $\Delta(\ln \|x\|)$, pour $x \neq 0$.
   (ii) En utilisant le résultat démontré II.3.(d), en déduire que
   $$\Delta(\ln \|x\|) = C\, \delta_0 \quad \textit{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2).$$

(iii) Calculer C.

3. (Résolution d'une EDO)

   Soit $a > 0$. On veut résoudre l'équation

$$T'' - a^2\, T = \delta_0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

   (a) Trouver une solution particulière dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. On pourra utiliser le calcul suivant de transformation de Fourier :

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-i\,x\,\xi}}{1 + a^2\,\xi^2}\; d\xi = \pi\, e^{-\frac{|x|}{2\,\pi\,|a|}}.$$

   (b) En déduire toutes les solutions dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

   (c) Résoudre, pour $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ (l'espace des distributions à support compact)

$$T'' - a^2\, T = f \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R})$$

   et vérifier que cette solution est donnée par une convolution à partir de la solution fondamentale du (b).

Exercice 2.

1. (Un cas de transport linéaire à coefficients variables explicite)

   (a) Donner l'expression des solutions classiques pour l'équation

$$\partial_t u + x\, \partial_x u = 0,$$

   avec la donnée initiale $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$. On donnera les équations des caractéristiques, leur solution, et on déduira la formule recherchée.

   (b) (3 points) Rappeler la définition des solutions faibles pour cette équation, et vérifier que lorsque $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$, l'expression trouvée précédemment continue d'avoir un sens, et est solution faible.

2. On considère l'équation de transport linéaire à coefficient constant

$$\partial_t u + c\, \partial_x u = 0,$$

   pour $c \in \mathbb{R}$, et une donnée initiale $u_0 \in C^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty$. Montrer que si u est solution faible sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est C^1 sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, alors c'est une solution forte.

Exercice 3.

1. Donner la définition du noyau de la chaleur du $\mathbb{R}^d$, où $d \in \mathbb{N}^*$.

2. Soient $c \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ continue, bornée. Montrer que le problème

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + c\, t\, u = 0, \ x \in \mathbb{R}^d, \, t > 0 \\ u(0,x) = f(x), \ x \in \mathbb{R}^d, \end{cases}$$

   admet une unique solution dans $C^0([0,+\infty[\times\mathbb{R}^d) \cap C^\infty(]0,+\infty[\times\mathbb{R}^d)$ et donner son expression en fonction de f.

Exercice 4.

1. (Transformation de Laplace). On rappelle que la **transformation de Laplace** d'une fonction $f = f(z)$ mesurable sur $\mathbb{R}$ s'écrit

$$\mathcal{L}(f)(y) = \int_0^{+\infty} f(z)\, e^{-y\,z}\, dz.$$

Cette intégrale est définie pour $y > \zeta(f)$ avec $\zeta(f)$ qui est le plus petit $y \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ tel que cette intégrale soit absolument convergente.

On définit la fonction suivante

$$f_{a,\lambda}(z) = e^{\frac{-(z-a)^2}{\lambda}}, \quad a \in \mathbb{R},\ \lambda > 0,$$

Montrer que sa transformée de Laplace est définie sur tout $\mathbb{R}$ et vaut

$$\mathcal{L}(f_{a,\lambda})(y) = \sqrt{\lambda\,\pi}\, e^{-a\,y+\lambda\,\frac{y^2}{4}}\, \mathcal{N}\left(-a\sqrt{\frac{2}{\lambda}} + \sqrt{\frac{\lambda}{2}}\, y\right),$$

où

$$\mathcal{N}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy.$$

2. On rappelle l'expression de l'ÉDP d'évaluation de Black et Scholes :

$$\begin{cases} \partial_t u + Lu - r\,u = 0,\ \forall\, t \in [0,T),\ x \in \mathbb{R}_+^* \\ Lu(t,x) = r\,x\,\partial_x u(t,x) + \frac{1}{2}\,\sigma^2\,x^2\,\partial_{xx}^2 u(t,x) \\ u(T,x) = (x-K)_+,\ \forall\, x \in \mathbb{R}_+^* \end{cases} \tag{1}$$

Donner la signification de toutes les quantités et variables dans cette équation, en terme de modélisation financière.

3. (Option Call-Spread). On considère un marché financier où les taux d'intérêt et les primes de risque sont constants. La dynamique du prix S d'une action est

$$dS_t = S_t\,(r\,dt + \sigma\,dWt), \quad S_0 = x.$$

Une option Call-Spread est une option d'achat qui paye à l'échéance T

$$f(S_T) = \min\{\alpha(S_T - K)_+; C\},$$

où α, K et C sont des constantes positives.

   (a) Donner le prix de cette option, en calculant la solution u de l'équation de Black et Scholes associée. On pourra poser

   $$U(s,y) = e^{\frac{2r-\sigma^2}{2\sigma^2}y + \frac{(\sigma^2+2r)^2}{4\sigma^4}s}\, u\left(T - \frac{2s}{\sigma^2}, K\,e^y\right),$$

   où r désigne le taux d'intérêt sans risque.

   (b) Décrire la stratégie de portefeuille qui réplique l'option Call-Spread.

   (c) Que se passe-t-il au voisinage de l'échéance ?