Utilisation du gradient de forme en segmentation

Laboratoire I3S – Equipe *Creative* (*)
En collaboration avec le laboratoire Dieudonné (**)
UMR CNRS – Université de Nice-Sophia Antipolis

(*) Michel Barlaud, Prof.
Muriel Gastaud
Eric Debreuve
(**) Gilles Aubert, Prof.

Plan

- Segmentation
  - Energie
  - Minimisation
- Gradient de forme
  - Expression générale
  - Réécriture
- Equation d'évolution
  - Discrète
  - Contrainte
  - Paramétrée
- Exemples
  - Information de référence
  - Compétition de régions

Segmentation

- Définie par le minimum d'une énergie

$$E_f(\Omega) = \int_\Omega \phi_f(x,\Omega)\ \mathrm{d}x$$

  - Descripteur $\phi_f(x,\Omega)$
    - Homogénéité
      - Moyenne, variance, entropie
      - Mouvement
    - Distribution de la couleur
      - Histogramme

- Exemple : Moyenne

$$\phi_f(x,\Omega) = (f(x) - \mu_f(\Omega))^2$$

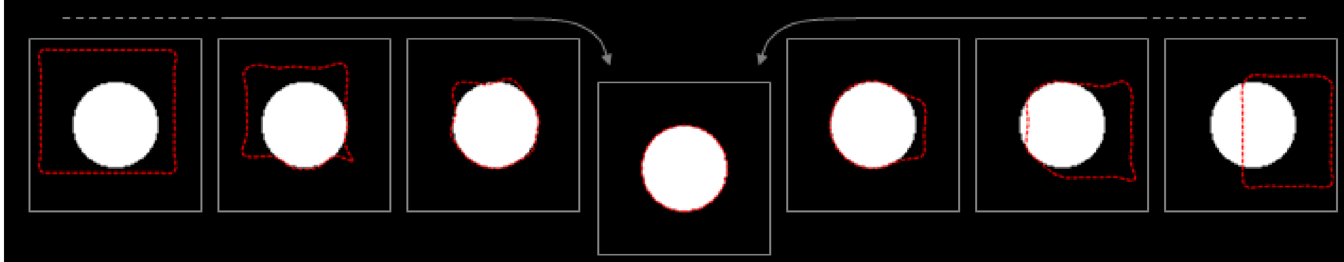
Minimisation

- Par une méthode de descente de gradient
  - A partir d'un domaine initial

  - Déformation itérative de la frontière du domaine

  $\rightarrow$ Contour actif

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \tau} = \nu_\tau,\ \Gamma = \partial \Omega$$



- Notion de dérivée de l'énergie par rapport au domaine

  $\rightarrow$ Gradient de forme

Gradient de forme

- Energie

$$E_f(\Omega) = \int_\Omega \phi_f(x,\Omega)\ \mathrm{d}x$$

- Schéma dynamique

$$E_f(\tau) = \int_{\Omega(\tau)} \boxed{\phi_f(x,\Omega(\tau))}\ \mathrm{d}x$$

- Expression générale

$$\frac{\partial}{\partial\tau}E_f(\tau,\nu) = \int_{\boxed{\Omega(\tau)}} \frac{\partial}{\partial\tau}\boxed{\phi_f(x,\Omega(\tau))}\ \mathrm{d}x - \int_{\Gamma(\tau)} \boxed{\phi_f(s,\Omega(\tau))}\,\nu(s)\,N_\tau(s)\ \mathrm{d}s$$

Vers une intégrale de contour

- Par application récursive du gradient de forme (1/2)
  - Expression générale

$$\frac{\partial}{\partial \tau} E_f(\tau, \nu) = \int_{\boxed{\Omega(\tau)}} \frac{\partial}{\partial \tau} \phi_f(x, \Omega(\tau)) \ \mathrm{d}x - \int_{\Gamma(\tau)} \phi_f(s, \Omega(\tau)) \, \nu(s) \, N_\tau(s) \ \mathrm{d}s$$

  - Propriété de $\phi_f(x, \Omega) \ \rightarrow \phi_f(x, \boxed{g(\Omega)})$

$$\int_{\Omega(\tau)} \frac{\partial}{\partial \tau} \phi_f(x, g(\Omega(\tau))) \ \mathrm{d}x$$

$$\int_{\Omega(\tau)} \frac{\partial}{\partial g} \phi_f(x, g(\Omega(\tau))) \ \frac{\partial}{\partial \tau} g(\Omega(\tau)) \ \mathrm{d}x$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial \tau} g(\Omega(\tau))} \underbrace{\int_{\Omega(\tau)} \frac{\partial}{\partial g} \phi_f(x, g(\Omega(\tau))) \ \mathrm{d}x}_{\text{Réel}}$$

  - Jusqu'à annulation de l'intégrale de domaine du gradient

$$\frac{\partial}{\partial \tau} E_f(\tau, \nu) = - \int_{\boxed{\Gamma(\tau)}} \Phi_f(s, \Omega(\tau)) \, \nu(s) \, N_\tau(s) \ \mathrm{d}s$$

Vers une intégrale de contour

- Par application récursive du gradient de forme (2/2)
  - Exemple
    - Descripteur ← variance
    - Variance ← moyenne
    - Moyenne ← image

Vers une intégrale de contour

- Par annulation immédiate (1/2)
  - Expression générale

$$\frac{\partial}{\partial \tau} E_f(\tau, \nu) = \int_{\boxed{\Omega(\tau)}} \frac{\partial}{\partial \tau} \phi_f(x, \Omega(\tau)) \;\; \mathrm{d}x - \int_{\Gamma(\tau)} \phi_f(s, \Omega(\tau)) \, \nu(s) \, N_\tau(s) \;\; \mathrm{d}s$$

  - Propriété de $\phi_f(x, \Omega)$ $\rightarrow \begin{cases} \phi_f(x, \boxed{g(\Omega)}) \\ g(\Omega) = \arg\min_k \underbrace{\int_\Omega \phi_f(x, k) \;\; \mathrm{d}x}_{E_f(k)} \end{cases}$

$$\int_{\Omega(\tau)} \frac{\partial}{\partial \tau} \phi_f(x, g(\Omega(\tau))) \;\; \mathrm{d}x$$

$$\int_{\Omega(\tau)} \frac{\partial}{\partial g} \phi_f(x, g(\Omega(\tau))) \, \frac{\partial}{\partial \tau} g(\Omega(\tau)) \;\; \mathrm{d}x$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} g(\Omega(\tau)) \int_{\Omega(\tau)} \frac{\partial}{\partial g} \phi_f(x, g(\Omega(\tau))) \;\; \mathrm{d}x$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} g(\Omega(\tau)) \underbrace{\frac{\partial}{\partial g} \int_{\Omega(\tau)} \phi_f(x, g(\Omega(\tau))) \;\; \mathrm{d}x}$$

Vers une intégrale de contour

- Par annulation immédiate (2/2)

$$\frac{\partial}{\partial \tau} g(\Omega(\tau)) \underbrace{\frac{\partial}{\partial g} \int_{\Omega(\tau)} \phi_f(x, g(\Omega(\tau))) \ \mathrm{d}x}_{\frac{\partial}{\partial k} E_f(k)|_{g(\Omega(\tau))} = 0}$$

  - Minimum sous contrainte : Multiplicateur de Lagrange

  - L'intégrale de domaine du gradient de forme est nulle

$$\frac{\partial}{\partial \tau} E_f(\tau, \nu) = - \int_{\boxed{\Gamma(\tau)}} \boxed{\phi_f(s, \Omega(\tau))} \nu(s) \ N_\tau(s) \ \mathrm{d}s$$

- Exemple : Moyenne

$$\phi_f(x, \Omega) = (f(x) - \boxed{\mu_f(\Omega)})^2$$

Equation d'évolution *directe*

- Minimisation de l'énergie
  - Par descente *le long* du gradient

$$\frac{\partial}{\partial \tau} E_f(\tau, \nu) = -\int_{\Gamma(\tau)} \boxed{\Phi_f(s, \Omega(\tau))}\, \nu(s)\; N_\tau(s)\;\; \mathrm{d}s$$

  - Négativité du gradient

    → Vitesse de la frontière du domaine

$$\nu(s) = \alpha_\tau \boxed{\Phi_f(s, \Omega(\tau))}\, N_\tau(s)\,,\;\; \alpha_\tau > 0$$

  - Par définition, sur la frontière

$$\nu = \frac{\partial \Gamma}{\partial \tau}$$

- Equation d'évolution

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \tau} = \alpha_\tau\;\, \Phi_f(\cdot, \Omega(\tau))\; N_\tau$$

Equation d'évolution *directe*

- Equation d'évolution

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \tau} = \alpha_\tau \; \Phi_f(\cdot, \Omega(\tau)) \; N_\tau$$

- Discrétisation *temporelle* et spatiale

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \tau}(s) \approx \Gamma_i(n+1) - \Gamma_i(n)$$

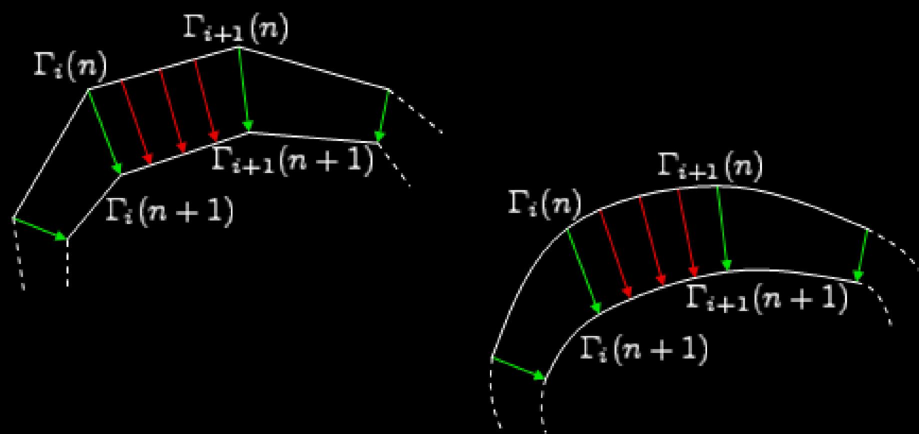
$$\Gamma_i(n+1) = \Gamma_i(n) + \alpha_n \; \Phi_f(\Gamma_i(n), \Omega(n)) \; N_{n,i}$$

- Choix de α_n

$$\alpha_n = \arg\min_\beta E_f(\Omega(n) + \beta \; \Phi_f(\cdot, \Omega(n)) \; N_n)$$

Déformation induite

- Par la modélisation de la frontière
  - Déformation induite ≠ déformation continue



- Négativité du gradient non garantie

Déformation contrainte

- Autre interprétation du gradient de forme (1/2)
  - Plutôt que : gradient de forme → déformation
  - Déformation donnée → [gradient de forme] → influence
    - > 0 : la déformation augmente l'énergie
    - < 0 : la déformation diminue l'énergie
- Déformation
  - Somme pondérée de déformations élémentaires
    → Choix a priori

$$\nu = \sum_i h_i \, \nu_i$$

Déformation contrainte

- Autre interprétation du gradient de forme (2/2)
  - Gradient de forme

$$\frac{\partial}{\partial \tau} E_f(\tau, \nu) = \sum_i h_i \, \frac{\partial}{\partial \tau} E_f(\tau, \nu_i)$$

  - Négativité du gradient

$$h_i = -\alpha_\tau \, \frac{\partial}{\partial \tau} E_f(\tau, \nu_i) \, , \; \alpha_\tau > 0$$

→ Equation d'évolution contrainte

$$\nu = \sum_i h_i \; \nu_i$$

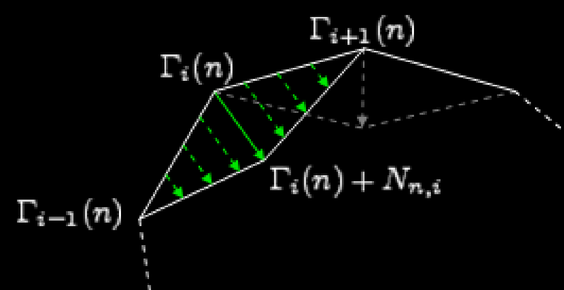
  - Choix de α_τ

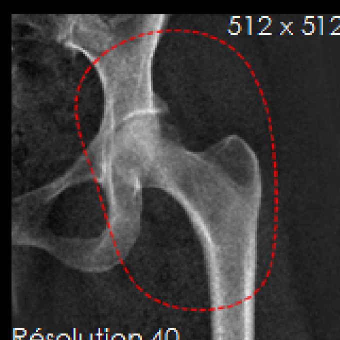
$$\alpha_\tau = \arg\min_\beta E_f(\Omega(\tau) - \beta \sum_i \frac{\partial}{\partial \tau} E_f(\tau, \nu_i) \; \nu_i)$$

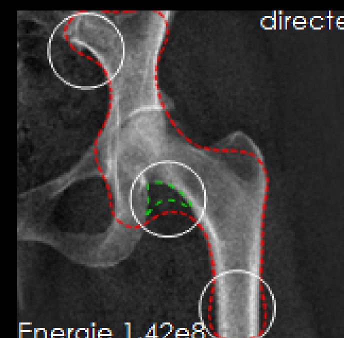
Comparaison : directe/contrainte

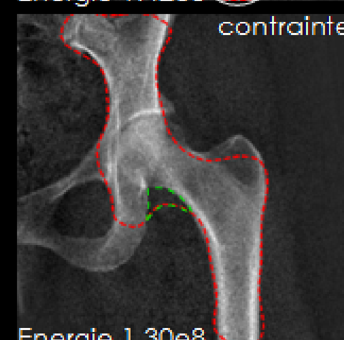
- Contrainte selon les *normales*
  - Déformations élémentaires

  → Définies par les *normales*





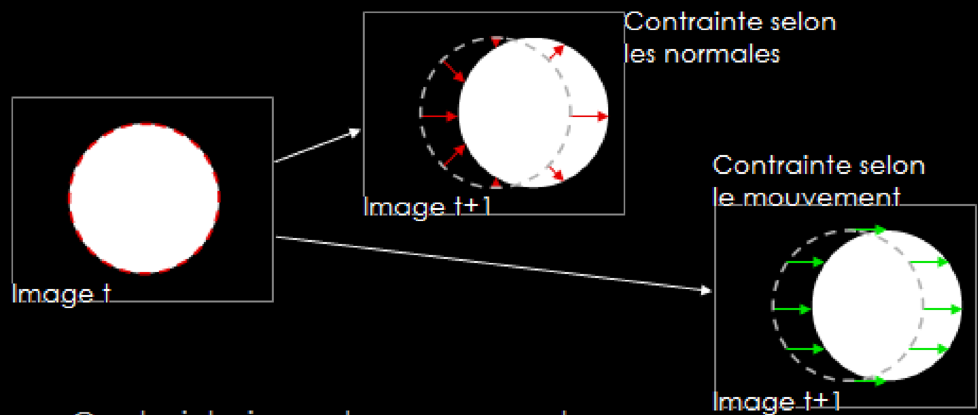




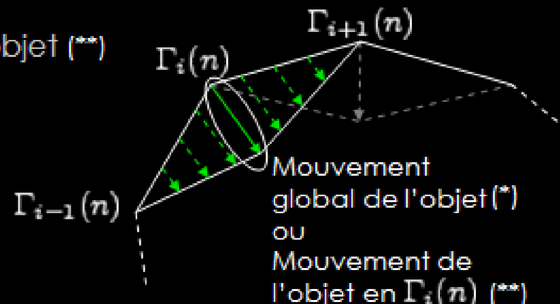
Résolution	30
Directe	1.12e8
Contrainte	1.11e8

Contrainte selon le mouvement

- Poursuite d'objet dans une séquence



- Contrainte issue du mouvement
  - Global de l'objet (*)
  - Local sur le contour de l'objet (**)



Déformation *paramétrée*

- Frontière du domaine : courbe paramétrée $p = \{p_i,\ 1 \leq i \leq n\}$
  - Energie

    $$E_f(\Omega) = E_f(p)$$

  - Dérivée de la frontière par rapport à p_i
    $\rightarrow$ Déformation élémentaire

    $$\frac{\partial \Gamma}{\partial p_i}$$

  - Déformation élémentaire $\rightarrow$[gradient de forme]$\rightarrow$
    Dérivée de l'énergie par rapport à p_i

    $$\frac{\partial E_f}{\partial p_i} = \frac{\partial}{\partial \tau} E_f(\tau, \frac{\partial \Gamma}{\partial p_i})$$

- Minimisation de l'énergie
  - Dans $\mathcal{R}^n$

Plan

- Segmentation
  - Energie
  - Minimisation
- Gradient de forme
  - Expression générale
  - Réécriture
- Equation d'évolution
  - Discrète
  - Contrainte
  - Paramétrée
- Exemples
  - Information de référence
  - Compétition de régions

Minimum de l'énergie

- Energie

$$E_f(\Omega) = \int_\Omega \phi_f(x, \Omega) \ \mathrm{d}x$$

- Positive ou égale à zéro
  - En pratique, jamais égale à zéro
  - Sauf pour l'ensemble vide

- Solutions
  - Information de référence
    - Histogramme
    - Forme
  - Compétition de régions

Forme de référence

- Homogénéité en couleur
  +
- Forme de référence
  - Energie de la frontière du domaine

    $$E_f(\Gamma) = \int_\Gamma \phi_{\mathbf{ref}}(s) \;\; \mathrm{d}s$$

  - Gradient de forme

    $$\frac{\partial}{\partial\tau} E_f(\tau,\nu) = \int_{\Gamma(\tau)} \left(\frac{\partial}{\partial N_\tau} \phi_{\mathbf{ref}}(s) - \phi_{\mathbf{ref}}(s) \; \kappa(s) \right) \; \nu(s) \; N_\tau(s) \;\; \mathrm{d}s$$


Forme de référence


Segmentation

Compétition de régions

- Deux régions : objet et fond
  - Compétition homogène

$$E_f(\Omega) = \int_\Omega \phi_f(x,\Omega) \;\, \mathrm{d}x + \int_{\bar\Omega} \phi_f(x,\bar\Omega) \;\, \mathrm{d}x$$

  - Equation d'évolution directe

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \tau} = \left(\Phi_f(\cdot,\Omega(\tau)) - \Phi_f(\cdot,\bar\Omega(\tau))\right) N_\tau$$

  - Compétition inhomogène

$$E_f(\Omega) = \int_\Omega \phi_f(x,\Omega) \;\, \mathrm{d}x + \lambda \int_{\bar\Omega} \psi_f(x,\bar\Omega) \;\, \mathrm{d}x$$

Contrainte selon le mouvement

- Poursuite d'objet dans une séquence
  - Energie de type « flot optique »
    - Mouvement paramétrique global

$$\begin{cases} E_f(\Omega_{t+1}) = \int_{\Omega_{t+1}} (f_t(x - m(\Omega_{t+1})) - f_{t+1}(x))^2 \ \mathrm{d}x \\ m(\Omega) = M \ p(\Omega) \end{cases}$$

  - Contrainte issue du mouvement
    - Global de l'objet



Entropie conjointe

$$E_f(\Omega) = -\int_R p(\Omega, \alpha) \log(p(\Omega, \alpha)) \ \ \mathrm{d}\alpha$$

$$p(\Omega, \alpha) = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega g_\sigma(f(x) - \alpha) \ \ \mathrm{d}x$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \tau} = \frac{1}{|\Omega|} \left\{ \log(|\Omega|) - E_f(\Omega) - [g_\sigma \star \log(|\Omega| \ p(\Omega))](f(x)) \right\} \ N_\tau$$