

INTRODUCTION À L'OPTIMISATION DE FORMES

G. ALLAIRE, CMAP, Ecole Polytechnique

1. Introduction
2. Position du problème
3. Optimisation géométrique
4. Méthode “level set”
5. Gradient topologique
6. Méthode d'homogénéisation

-I- INTRODUCTION

Un problème d'optimisation de structures (ou de formes) est défini par trois données:

- ➡ un **modèle** (typiquement une équation aux dérivées partielles) qui permet d'évaluer (on dit aussi d'analyser) le comportement mécanique d'une structure,
- ➡ un **critère** que l'on cherche à minimiser ou maximiser, et éventuellement plusieurs critères (on parle aussi de fonction objectif ou coût),
- ➡ un **ensemble admissible** de variables d'optimisation qui tient compte d'éventuelles contraintes que l'on impose aux variables.

Parmi les problèmes d'optimisation de formes on peut distinguer trois grandes catégories, **du plus “facile” au plus “difficile”**:

- ➡ l'optimisation de formes **paramétrique** où les formes sont paramétrées par un nombre réduit de variables (par exemple, une épaisseur, un diamètre, des dimensions), ce qui limite considérablement la variété des formes possibles (ou admissibles),
- ➡ l'optimisation de formes **géométrique** où, à partir d'une forme initiale, on varie la position des frontières de la forme (sans toutefois changer la topologie de la forme, c'est-à-dire le nombre de trous en 2-d),
- ➡ l'optimisation de formes **topologique** où l'on cherche, sans aucune restriction explicite ou implicite, la meilleure forme possible quitte à changer de topologie.

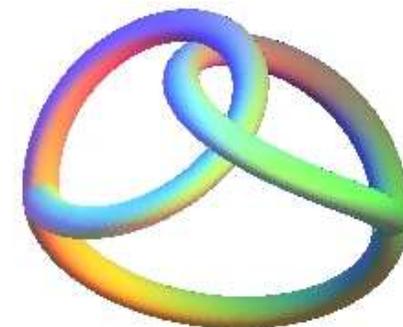
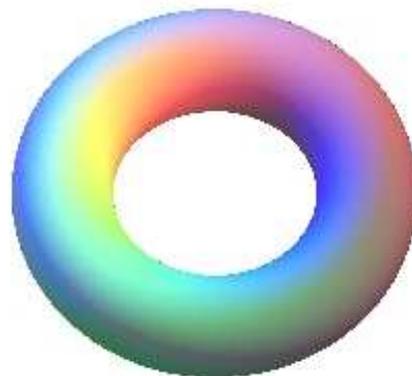
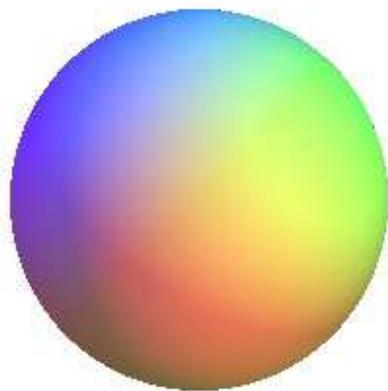
Définition de la topologie

Deux formes ont la même topologie si on peut passer de l'une à l'autre par une déformation continue.

En dimension 2 la topologie est caractérisée par le nombre de composantes connexes du bord ou de trous.

En dimension 3 c'est plus compliqué ! Il faut tenir compte du nombre de composantes connexes du bord mais aussi du nombre "d'anses" ou de "boucles".

(une boule \neq une boule creuse \neq un tore \neq un bretzel)



Méthodes présentées ici

1. Optimisation géométrique par variation de frontière.

Méthode d'Hadamard revue et corrigée par de nombreux auteurs (Murat-Simon, Pironneau, Sokolowski-Zolesio, Ecole de Nice, etc.).

2. Optimisation topologique.

- (a) Méthode des lignes de Niveaux (Osher, Sethian, A.-Jouve-Toader, etc.)
- (b) Gradient topologique (Masmoudi, Sokolowski, etc.)
- (c) Méthode d'homogénéisation (Murat-Tartar, Lurie-Cherkaev, Kohn-Strang, Bendsoe-Kikuchi, A.-Bonnetier-Francfort-Jouve, etc.)

Je ne parlerai pas des méthodes stochastiques de type 0/1, ni de l'approche par champ de phase de Bourdin-Chambolle, ni de la méthode SIMP de Bendsoe, Sigmund, Rozvany.

-II- POSITION DU PROBLEME

Problème modèle: optimisation de structures en élasticité linéaire.

Forme Ω de frontière

$$\partial\Omega = \Gamma \cup \Gamma_N \cup \Gamma_D,$$

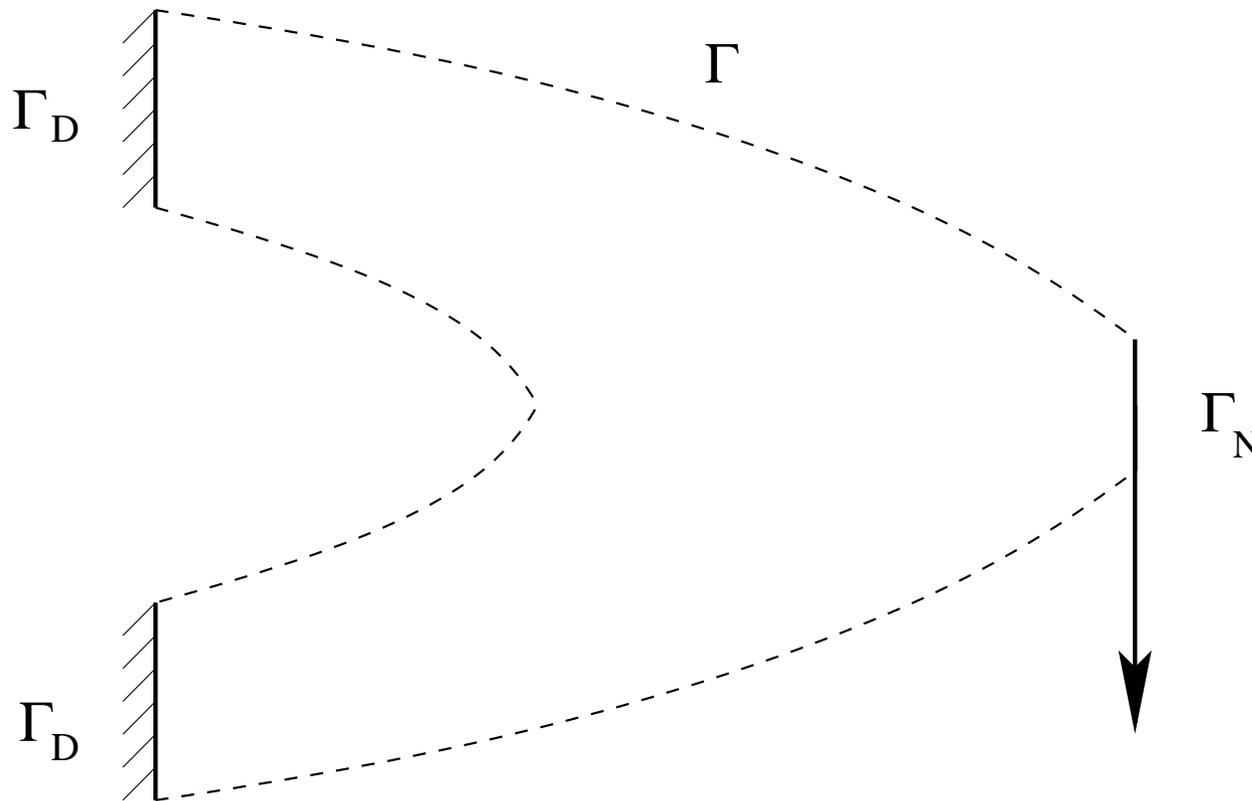
avec condition aux limites de Dirichlet sur Γ_D , et de Neumann sur $\Gamma \cup \Gamma_N$.

Seule Γ sera susceptible d'être optimisée.

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div} (A e(u)) = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_D \\ (A e(u))n = g & \text{sur } \Gamma_N \\ (A e(u))n = 0 & \text{sur } \Gamma \end{array} \right.$$

avec $e(u) = \frac{1}{2} (\nabla u + (\nabla u)^t)$, et A tenseur d'élasticité isotrope homogène.

Conditions aux limites pour une console élastique: Γ_D est le bord vertical gauche, Γ_N le bord vertical droit, et Γ , en pointillé, le reste.



FONCTIONS OBJECTIFS**Deux exemples:**

La compliance ou travail des forces extérieures

$$J(\Omega) = \int_{\Gamma_N} g \cdot u \, ds = \int_{\Omega} A e(u) \cdot e(u) \, dx,$$

Un critère de moindres carrés (utile pour les mécanismes)

$$J(\Omega) = \left(\int_{\Omega} k(x) |u - u_0|^\alpha \, dx \right)^{1/\alpha},$$

avec u_0 un déplacement cible, $\alpha \geq 2$ et k un facteur multiplicatif donné.

THEORIE D'EXISTENCE

Ensemble “minimum” de formes admissibles

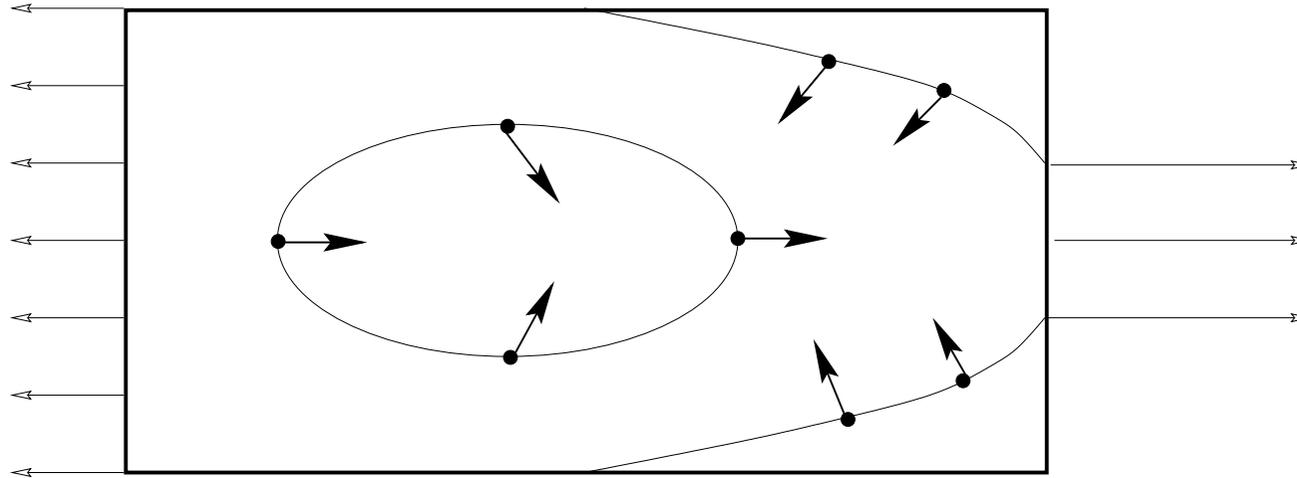
$$\mathcal{U}_{ad} = \left\{ \Omega \subset D, \text{ vol}(\Omega) = V_0, \Gamma_D \cup \Gamma_N \subset \partial\Omega \right\}$$

avec D un ouvert borné de \mathbb{R}^N . En général, le problème de minimisation est mal posé sur \mathcal{U}_{ad} (cf. contre-exemples de non-existence de F. Murat, non-unicité de G. A., Springer 2002).

Il existe une forme optimale si l'une des conditions suivantes est remplie:

1. condition de cône intérieur uniforme (D. Chenuis),
2. contrainte sur le périmètre (L. Ambrosio, G. Buttazzo),
3. borne uniforme sur le nombre de composantes connexes de $D \setminus \Omega$ en dimension deux (A. Chambolle, V. Sverak).

-III- OPTIMISATION GEOMETRIQUE



- ➡ On déplace des **noeuds de contrôle** de la frontière.
- ➡ En pratique, **pas de changement de topologie**.
- ➡ Nombreux minima locaux, pas de convergence par raffinement de maillage.
- ➡ Implémentation numérique coûteuse à cause du remaillage.
- ➡ **Très générale: modèle et fonction objectif quelconques.**

DERIVATION PAR RAPPORT AU DOMAINE

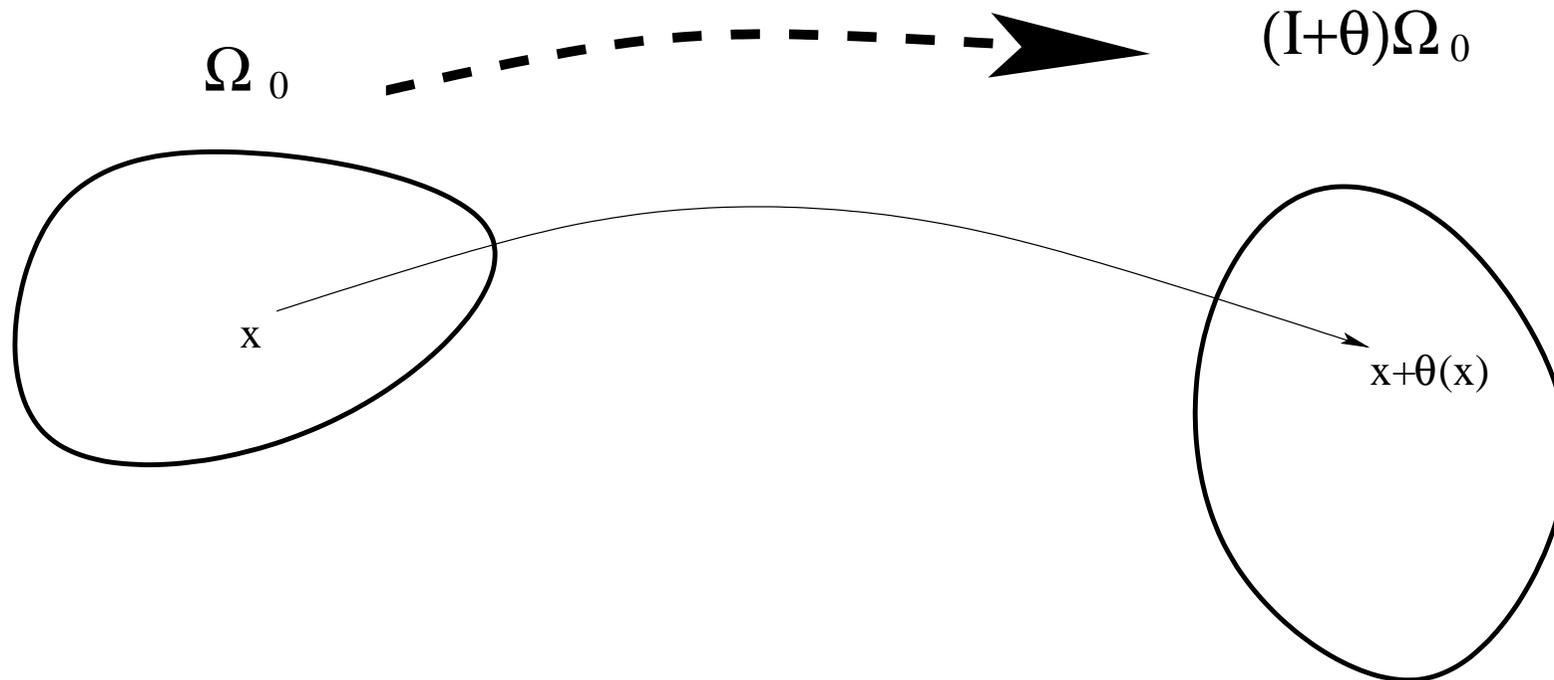
Rappels (cf. Murat-Simon) :

Soit Ω_0 un domaine de référence. On considère des domaines du type

$$\Omega = (Id + \theta)\Omega_0 \quad \text{avec} \quad \theta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N).$$

Lemme. Pour tout $\theta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ vérifiant $\|\theta\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)} < 1$, alors $(Id + \theta)$ est un difféomorphisme de \mathbb{R}^N .

Définition: on appelle dérivée d'une fonction $J(\Omega)$ en Ω_0 la différentielle (Fréchet) de $\theta \rightarrow J((Id + \theta)\Omega_0)$ en 0.



L'ensemble $\Omega = (Id + \theta)(\Omega_0)$ est défini par

$$\Omega = \{x + \theta(x) \mid x \in \Omega_0\}.$$

On peut donc voir $\theta(x)$ comme un champ de vecteur qui **transporte** le domaine de référence Ω_0 .

Exemples de dérivées

Lemme 1. Soit Ω_0 un ouvert borné régulier de classe \mathcal{C}^1 de \mathbb{R}^N . Soit $f(x) \in W^{1,1}(\mathbb{R}^N)$ et soit J définie par

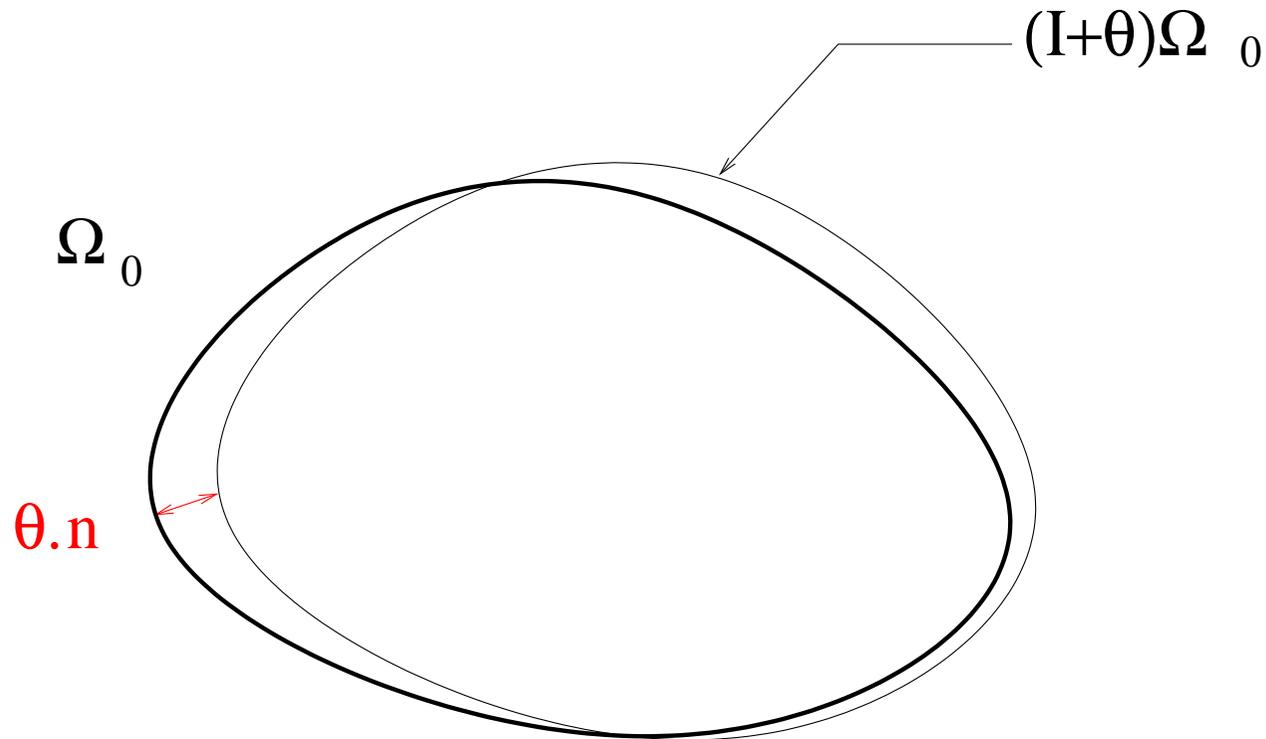
$$J(\Omega) = \int_{\Omega} f(x) dx.$$

Alors J est différentiable en Ω_0 et on a

$$J'(\Omega_0)(\theta) = \int_{\Omega_0} \operatorname{div} (\theta(x) f(x)) dx = \int_{\partial\Omega_0} \theta(x) \cdot n(x) f(x) ds$$

pour tout $\theta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$.

Preuve intuitive



Surface balayée par la transformation $(Id + \theta)\Omega_0 = \partial\Omega_0 \times (\theta \cdot n)$.

Donc

$$\int_{(Id+\theta)\Omega_0} f(x) dx = \int_{\Omega_0} f(x) dx + \int_{\partial\Omega_0} f(x)\theta \cdot n ds + o(\theta).$$

Lemme 2. Soit Ω_0 un ouvert borné régulier de classe \mathcal{C}^1 de \mathbb{R}^N . Soit $f(x) \in W^{2,1}(\mathbb{R}^N)$ et soit J définie par

$$J(\Omega) = \int_{\partial\Omega} f(x) ds.$$

Alors J est différentiable en Ω_0 et on a

$$J'(\Omega_0)(\theta) = \int_{\partial\Omega_0} (\nabla f \cdot \theta + f(\operatorname{div} \theta - \nabla \theta n \cdot n)) ds$$

pour tout $\theta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$. De plus, si Ω_0 est régulier de classe \mathcal{C}^2 , alors

$$J'(\Omega_0)(\theta) = \int_{\partial\Omega_0} \theta \cdot n \left(\frac{\partial f}{\partial n} + H f \right) ds,$$

où H est la courbure moyenne de $\partial\Omega_0$ définie par $H = \operatorname{div} n$.

DERIVEE DE FORME DE LA COMPLIANCE

$$J(\Omega) = \int_{\Gamma_N} g \cdot u_\Omega ds = \int_{\Omega} A e(u_\Omega) \cdot e(u_\Omega) dx,$$

$$J'(\Omega_0)(\theta) = - \int_{\Gamma} A e(u) \cdot e(u) \theta \cdot n ds,$$

où u est l'état dans Ω_0 .

Remarque: il n'y a pas d'état adjoint car le problème est auto-adjoint.

DERIVEE DE FORME DU CRITERE DE MOINDRES CARRES

$$J(\Omega) = \left(\int_{\Omega} k(x) |u_{\Omega} - u_0|^{\alpha} dx \right)^{1/\alpha},$$

$$J'(\Omega_0)(\theta) = \int_{\Gamma} \left(-Ae(p) \cdot e(u) + \frac{C_0}{\alpha} k |u - u_0|^{\alpha} \right) \theta \cdot n ds,$$

où u est l'état et p l'état adjoint défini par

$$\begin{cases} -\operatorname{div} (Ae(p)) = C_0 k(x) |u - u_0|^{\alpha-2} (u - u_0) & \text{in } \Omega_0 \\ p = 0 & \text{on } \Gamma_D \\ (Ae(p))n = 0 & \text{on } \Gamma_N \cup \Gamma, \end{cases}$$

$$\text{avec } C_0 = \left(\int_{\Omega_0} k(x) |u(x) - u_0(x)|^{\alpha} dx \right)^{1/\alpha-1}.$$

Idée de preuve.

La preuve est très classique.

Preuve rigoureuse mais un peu longue:

- ⇒ Changement de variables: $x \in \Omega_0 \Rightarrow y = x + \theta(x) \in \Omega$. On réécrit toutes les intégrales sur le domaine de référence Ω_0 .
- ⇒ On écrit la formulation variationnelle de l'e.d.p. dans Ω_0 .
- ⇒ On différentie par rapport à θ .

Preuve formelle mais plus simple (due à J. Céa) pour $J(\Omega) = \int_{\Omega} j(x, u_{\Omega}) dx$:

⇒ On écrit un Lagrangian pour $(v, q) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\Omega, v, q) = & \int_{\Omega} j(x, v) dx + \int_{\Omega} Ae(v) \cdot e(q) dx - \int_{\Gamma_N} q \cdot g ds \\ & - \int_{\Gamma_D} \left(q \cdot Ae(v)n + v \cdot Ae(q)n \right) ds. \end{aligned}$$

$$\min_{\Omega} \max_q \mathcal{L}(\Omega, v, q) = \min_{\Omega} J(\Omega)$$

⇒ La stationnarité de \mathcal{L} donne l'équation d'état et l'équation adjointe.

⇒ On remarque que $J(\Omega) = \mathcal{L}(\Omega, u_{\Omega}, p_{\Omega})$, et donc

$$J'(\Omega)(\theta) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Omega}(\Omega, u_{\Omega}, p_{\Omega})$$

Structure de la dérivée de forme

Dans tous les cas on peut montrer que

$$J'(\Omega)(\theta) = \int_{\partial\Omega} j \theta \cdot n \, ds$$

où j est une fonction scalaire qui dépend de $u, p, n, H \dots$

Méthode de gradient: la direction de déplacement est

$$\theta = -j n$$

Algorithme pour la minimisation de la compliance

Soit $t > 0$ un pas de descente fixé. On calcule une suite $\Omega_k \in \mathcal{U}_{ad}$ par

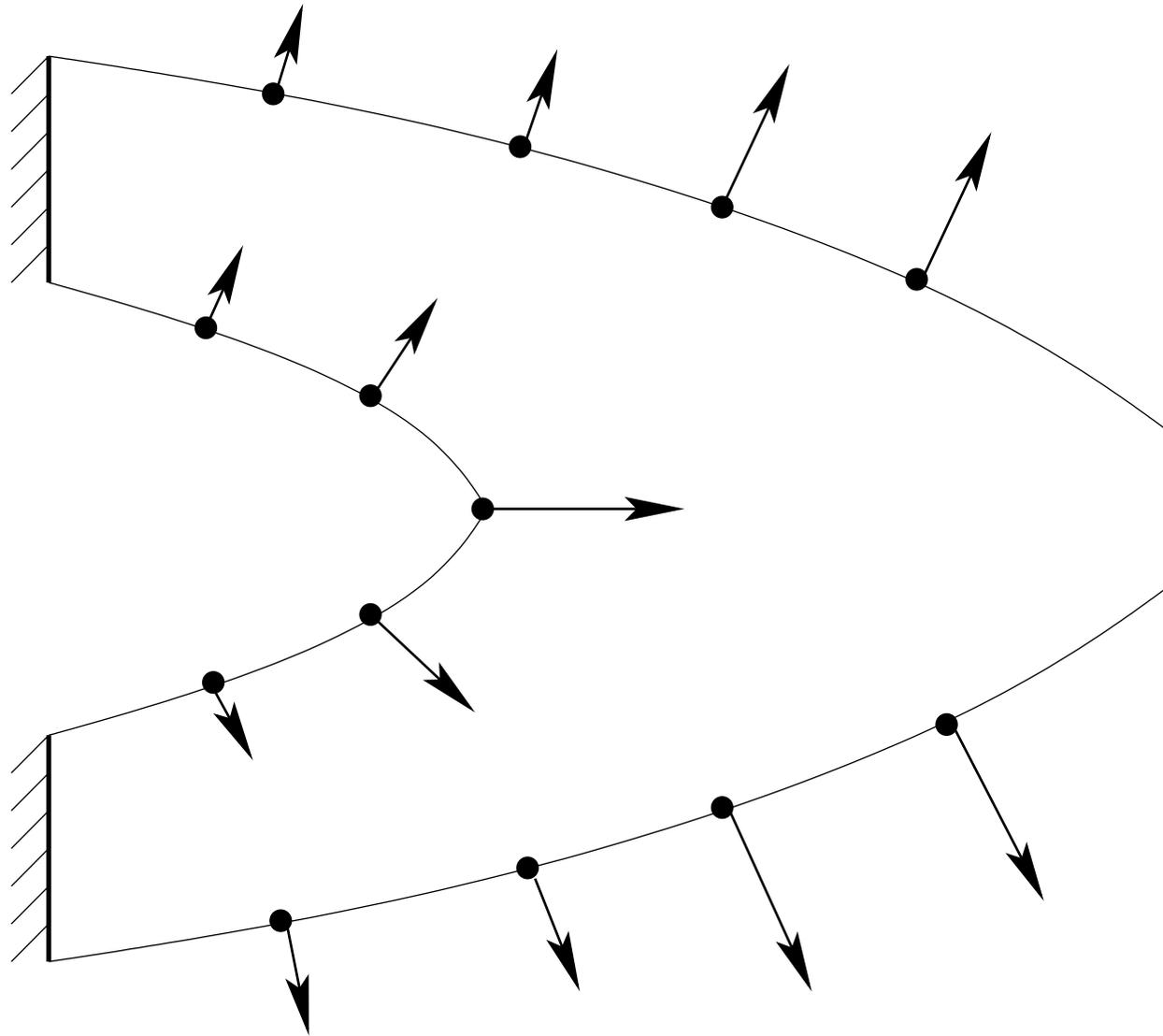
1. Initialisation de la forme Ω_0 .
2. Itérations jusqu'à convergence, pour $k \geq 0$:

$$\Omega_{k+1} = (Id + \theta_k)\Omega_k \quad \text{avec} \quad \theta_k = -tJ'(\Omega_k)n + \ell_k n,$$

où n est le vecteur normal au bord $\partial\Omega_k$ et $\ell_k \in \mathbb{R}$ est le multiplicateur de Lagrange tel que Ω_{k+1} satisfasse la contrainte de volume. La dérivée est donnée sur le bord Γ_k par

$$J'(\Omega_k) = -2\mu|e(u_k)|^2 - \lambda \operatorname{tr}(e(u_k))^2$$

avec u_k la solution de l'équation d'état dans le domaine Ω_k .



Déformation de maillage

Pour changer la forme il faut pouvoir remailler automatiquement à chaque itération, ou bien déformer le maillage à chaque itération.

- ✘ Champ de déplacement θ proportionnel à n (normale au bord), défini uniquement sur le bord.
- ✘ On préfère déformer le maillage (c'est moins cher).
- ✘ Dans ce cas il faut étendre θ à l'intérieur.
- ✘ Il faut vérifier que les bords déplacés ne se croisent pas...
- ✘ Néanmoins il faut remailler régulièrement (c'est cher).
- ✘ Ce sont souvent les contraintes géométriques qui stoppent l'algorithme.

La mise en oeuvre informatique de l'optimisation géométrique est compliquée, surtout en 3-d.

Extension du champ de déplacement

$$J'(\Omega)(\theta) = \int_{\Gamma} j \theta \cdot n \, ds$$

Pour étendre jn à l'intérieur (et le régulariser un peu) on résout

$$\begin{cases} -\Delta\theta = 0 & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial\theta}{\partial n} = -jn & \text{sur } \Gamma \\ \theta = 0 & \text{sur } \Gamma_D \cup \Gamma_N \end{cases}$$

On vérifie que c'est bien une direction de descente car

$$\int_{\Omega} |\nabla\theta|^2 \, dx = - \int_{\Gamma} j \theta \cdot n \, ds$$

Calculs FreeFem++ ; programmes disponibles sur la page web

http://www.cmap.polytechnique.fr/~allaire/cours_X_annee3.html

-IV- METHODE LEVEL SET

Idée: on reste dans le cadre de la méthode d'Hadamard mais l'implémentation numérique (astucieuse) permet de changer la topologie.

- ➡ On calcule une dérivée par rapport au domaine de la fonction objectif.
- ➡ On représente les formes par une fonction “ligne de niveaux” sur un maillage fixe.
- ➡ La forme est déplacée suivant la direction du gradient: on résout une équation de transport de type Hamilton-Jacobi.
- ➡ Quelques références: Sethian et Wiegmann (JCP 2000), Osher et Santosa (JCP 2001), Allaire, Jouve et Toader (CRAS 2002, JCP 2003, CMAME 2005), Wang, Wang et Guo (CMAME 2003).
- ➡ Proche (mais différent) de la méthode “à deux champs” de Bourdin et Chambolle (COCV 2003).

On ne maille pas la forme, mais on la capture sur un maillage fixe d'une grande boîte D .

On paramètre la forme Ω par une fonction "ligne de niveaux"

$$\begin{cases} \psi(x) = 0 & \Leftrightarrow x \in \partial\Omega \cap D \\ \psi(x) < 0 & \Leftrightarrow x \in \Omega \\ \psi(x) > 0 & \Leftrightarrow x \in (D \setminus \Omega) \end{cases}$$

La normale n de Ω est égale à $\nabla\psi/|\nabla\psi|$ et la courbure H est égale à la divergence de n . Ces formules ont un sens partout dans D et pas seulement sur la frontière $\partial\Omega$.

Equation de Hamilton Jacobi

Si la forme $\Omega(t)$ évolue suivant le temps t avec une vitesse normale $V(t, x)$, on trouve une équation de Hamilton Jacobi pour la fonction ψ . En effet,

$$\psi(t, x(t)) = 0 \quad \text{pour tout } x(t) \in \partial\Omega(t).$$

En dérivant il vient

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} + \dot{x}(t) \cdot \nabla_x \psi = \frac{\partial\psi}{\partial t} + Vn \cdot \nabla_x \psi = 0.$$

Comme $n = \nabla_x \psi / |\nabla_x \psi|$ on trouve

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} + V|\nabla_x \psi| = 0.$$

Cette équation est posée dans tout D , et pas seulement sur le bord $\partial\Omega$, si la vitesse est connue partout.

Idée de la méthode

Dérivée de forme

$$J'(\Omega_0)(\theta) = \int_{\Gamma_0} j(u, p, n) \theta \cdot n \, ds.$$

Méthode de gradient sur la forme

$$\Omega_{k+1} = \left(Id - t j(u_k, p_k, n_k) n_k \right) \Omega_k$$

car la normale n_k est “naturellement” étendue à tout D . Autrement dit, on transporte le bord de la forme avec la vitesse normale $-j$. On introduit un “pseudo-temps” (paramètre de descente) et on résout

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} - j |\nabla_x \psi| = 0 \quad \text{dans } D$$

ALGORITHME NUMERIQUE

1. Initialisation de la fonction ligne de niveaux ψ_0 (un produit de sinus, par exemple).
2. Itérations jusqu'à convergence pour $k \geq 1$:
 - (a) Calcul de u_k et p_k par un problème d'élasticité linéaire pour la forme ψ_k .
Calcul du gradient de forme = vitesse normale V_k
 - (b) Transport de la forme par la vitesse V_k (équation de Hamilton Jacobi) pour obtenir une nouvelle forme ψ_{k+1} .
 - (c) Eventuellement, réinitialisation de la fonction ligne de niveaux pour que ψ_{k+1} soit la distance signée à l'interface.

Détails sur l'algorithme

- ✗ Maillage quadrangulaire.
- ✗ Schéma aux différences finies, upwind d'ordre 1 ou 2, pour l'équation de Hamilton Jacobi donnant ψ (discrétisé aux noeuds).
- ✗ Calcul d'élasticité par éléments finis Q1 dans la grande boîte D

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div} (A^* e(u)) = 0 & \text{dans } D \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_D \\ (A^* e(u))n = g & \text{sur } \Gamma_N \\ (A^* e(u))n = 0 & \text{sur } \partial D \setminus (\Gamma_N \cup \Gamma_D). \end{array} \right.$$

- ✗ Tenseur d'élasticité A^* défini à partir du matériau A par

$$A^* = \theta A \quad \text{avec} \quad 10^{-3} \leq \theta \leq 1$$

et $\theta =$ interpolation (constante par mailles) égale à la proportion de la zone où $\psi < 0$.

Trucs

- ➡ **Choix du pas de descente** (ou nombre de pas de temps) contrôlé par la décroissance de la fonction objectif (en général ≈ 20).
- ➡ Heuristique de contrôle: si on remonte, on revient en arrière et on diminue le pas de descente, sinon on augmente le pas de descente (dans des bornes fixées).
- ➡ **Réinitialisation**: pour régulariser la fonction ligne de niveaux et éviter qu'elle ne devienne **trop plate ou trop raide** par diffusion numérique, on la réinitialise en résolvant

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \text{sign}(\psi_0) \left(|\nabla_x \psi| - 1 \right) = 0 & \text{for } x \in D, t > 0 \\ \psi(t = 0, x) = \psi_0(x) \end{cases}$$

dont la solution stationnaire est la fonction **distance signée** à l'interface $\{\psi_0(x) = 0\}$.

GENERALISATIONS

- ⇒ Chargement multiple.
- ⇒ Forces ou pressions "suiveuses" (qui dépendent de la forme).
- ⇒ Elasticité non-linéaire.
- ⇒ Maximisation de fréquences propres de vibration (y compris valeur propre multiple).
- ⇒ Compliance robuste (optimisation du pire des cas lorsqu'il y a une incertitude sur le chargement).
- ⇒ Optimisation de la charge critique de flambement.

EXEMPLES NUMERIQUES

Voir la page web

http://www.cmap.polytechnique.fr/~optopo/level_fr.html

- ⇒ Sauf mention contraire on minimise la compliance.
- ⇒ On trace soit la fonction ligne de niveau (en couleurs), soit la densité de matière (blanc=vide).

-V- GRADIENT TOPOLOGIQUE

Idée introduite par Eschenauer-Schumacher (1994), Guillaume-Masmoudi (2001), Sokolowski-Zochowski (1999).

Soit un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ et un point $x_0 \in \Omega$. Soit $\omega \subset \mathbb{R}^d$ un trou de forme fixée (contenant l'origine), $x_0 \in \Omega$ et $\rho > 0$. On définit le domaine perforé

$$\Omega_\rho = \Omega \setminus \bar{\omega}_\rho \quad \text{avec} \quad \omega_\rho = x_0 + \rho\omega.$$

Définition. Si la fonction objectif admet le développement asymptotique topologique suivant pour $\rho > 0$

$$J(\Omega_\rho) = J(\Omega) + \rho^d D_T J(x_0) + o(\rho^d),$$

alors $D_T J(x_0)$ est appelé le gradient topologique au point x_0 .

Si $D_T J(x_0) < 0$, alors on peut nucléer un petit trou en x_0 pour décroître la fonction objectif.

Exemples

Lemme. Le gradient topologique de $V(\Omega) = \int_{\Omega} dx$ est

$$D_T V(x) = -|\omega|.$$

Théorème (Garreau-Guillaume-Masmoudi, Sokolowski-Zochowski).

Soit ω la boule unité de \mathbb{R}^d . Pour tout $x \in \Omega$ le gradient topologique de la compliance est, pour $d = 2$,

$$D_T J(x) = \frac{\pi(\lambda+2\mu)}{2\mu(\lambda+\mu)} \left\{ 4\mu A e(u) \cdot e(u) + (\lambda - \mu) \text{tr}(A e(u)) \text{tr}(e(u)) \right\} (x),$$

et pour $d = 3$,

$$D_T J(x) = \frac{\pi(\lambda+2\mu)}{\mu(9\lambda+14\mu)} \left\{ 20\mu A e(u) \cdot e(u) + (3\lambda - 2\mu) \text{tr}(A e(u)) \text{tr}(e(u)) \right\} (x).$$

ALGORITHME NUMERIQUE

Le gradient topologique est couplé à la méthode des lignes de niveaux.

1. Initialisation de la fonction level set ψ_0 (en général sans trous).
2. Itérations jusqu'à convergence, pour $k \geq 0$:
 - (a) **Elasticité.** Calcul de u_k et p_k dans Ω_k . Evaluation de la dérivée de forme $J'(\Omega_k)$ et du gradient topologique $D_T J_k$.
 - (b) **Dérivée de forme.** Si $\text{mod}(k, n_{top}) > 0$, la forme actuelle Ω_k , caractérisée par la fonction level set ψ_k , est transportée dans une nouvelle forme Ω_{k+1} , caractérisée par ψ_{k+1} , en résolvant l'équation de transport de Hamilton-Jacobi avec la vitesse $-J'(\Omega_k)$.
 - (c) **Gradient topologique.** Si $\text{mod}(k, n_{top}) = 0$, on introduit de nouveaux trous dans la forme Ω_k là où le gradient topologique $D_T J_k$ est de valeur négative minimale.

EXEMPLES NUMERIQUES

Voir la page web

http://www.cmap.polytechnique.fr/~optopo/level_en.html

Référence: Allaire G., de Gournay F., Jouve F., Toader A.-M., *Structural optimization using topological and shape sensitivity via a level set method*, to appear in Control and Cybernetics, 2005.

-VI- METHODE D'HOMOGENEISATION

La méthode d'homogénéisation est une méthode de “relaxation”: elle rend les problèmes bien posés en élargissant l'espace des formes admissibles.

On introduit des formes “généralisées” mais pas trop... On exige que les formes généralisées soient les “limites” des suites minimisantes de formes classiques.

Les suites minimisantes de formes ont tendance à fabriquer des mélanges fins de matière et de vide.

Donc l'homogénéisation autorise comme formes admissibles des matériaux composites obtenus par microperforation de la matière.

Notations

➡ On représente une **forme classique** par une fonction caractéristique

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{dans la forme,} \\ 0 & \text{dans les trous.} \end{cases}$$

➡ Désormais, les trous peuvent être microscopiques autant que macroscopiques
⇒ matériaux composites !

➡ On représente une **forme généralisée** par une **densité de matière** $\theta(x) \in [0, 1]$,
et une **microstructure (ou forme des trous)**.

➡ La forme des trous est importante ! Elle induit une nouvelle variable
d'optimisation qui est le **comportement effectif** $A^*(x)$ du matériau composite
(déterminé par homogénéisation).

➡ (θ, A^*) sont les deux variables d'optimisation.

Buts de la méthode d'homogénéisation

- ➔ Introduire la notion de forme généralisée qui est faite de **matériau composite**.
- ➔ Montrer que ces formes généralisées sont limites de suites de formes classiques (à préciser).
- ➔ Calculer la fonction objectif généralisée et son gradient.
- ➔ Démontrer un théorème d'existence de forme généralisée optimale.
- ➔ Construire de **nouveaux algorithmes numériques** d'optimisation topologique de type **capture de formes**.

Malheureusement, méthode limitée à des modèles et des fonctions objectifs simples.

Formulation homogénéisée de l'optimisation

L'ensemble admissible homogénéisé est

$$\mathcal{U}_{ad}^* = \left\{ (\theta, A^*) \in L^\infty \left(D; [0, 1] \times \mathbb{R}^{N^4} \right), A^*(x) \in G_{\theta(x)} \text{ dans } D \right\}.$$

Le problème homogénéisé est

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sigma = A^* e(u) & \text{avec } e(u) = \frac{1}{2} (\nabla u + (\nabla u)^t), \\ \operatorname{div} \sigma = 0 & \text{dans } D, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_D \\ \sigma n = g & \text{sur } \Gamma_N \\ \sigma n = 0 & \text{sur } \partial D \setminus (\Gamma_D \cup \Gamma_N). \end{array} \right.$$

La compliance homogénéisée est définie par

$$c(\theta, A^*) = \int_{\Gamma_N} g \cdot u \, ds.$$

Le problème d'optimisation **relaxé ou homogénéisé** s'écrit donc

$$\min_{(\theta, A^*) \in \mathcal{U}_{ad}^*} \left\{ J(\theta, A^*) = c(\theta, A^*) + \ell \int_D \theta(x) dx \right\}.$$

Inconvénient majeur: on ne connaît pas de caractérisation explicite de l'ensemble G_θ de tous les matériaux composites!

Heureusement, pour la compliance on pourra remplacer G_θ par son sous-ensemble explicite des composites laminés.

Le point crucial pour **se passer de la connaissance** de G_θ est que l'on peut réécrire, grâce au principe de minimisation de l'énergie complémentaire, la compliance comme

$$c(\theta, A^*) = \int_{\Gamma_N} g \cdot u ds = \min_{\substack{\text{div} \sigma = 0 \text{ dans } D \\ \sigma n = g \text{ sur } \Gamma_N \\ \sigma n = 0 \text{ sur } \partial D \setminus \Gamma_N \cup \Gamma_D}} \int_D A^{*-1} \sigma \cdot \sigma dx.$$

Le problème d'optimisation de formes devient une **double minimisation**.

Algorithme numérique

Double minimisation “alternée” en σ et en (θ, A^*) .

- initialisation de la forme (θ_0, A_0^*)
- itérations $n \geq 1$ jusqu'à convergence
 - étant donnée une forme $(\theta_{n-1}, A_{n-1}^*)$, on calcule les contraintes σ_n par résolution d'un problème d'élasticité linéaire (par une méthode d'éléments finis)
 - étant donné ce tenseur des contraintes σ_n , on calcule les nouveaux paramètres de forme (θ_n, A_n^*) avec les formules explicites d'optimalité faisant intervenir σ_n .

Remarques.

- ☞ Pour la compliance, le problème est **auto-adjoint**.
- ☞ Méthode **micro-macro** (microstructure locale / densité globale).

Pénalisation

L'algorithme précédent calcule des formes **composites** alors qu'on veut plutôt des formes **classiques**.

On utilise une technique de pénalisation pour forcer la densité à ne prendre que les valeurs 0 ou 1.

Algorithme: après convergence vers une forme composite, on refait quelques itérations en utilisant une densité pénalisée

$$\theta_{pen} = \frac{1 - \cos(\pi\theta_{opt})}{2}.$$

Si $0 < \theta_{opt} < 1/2$, alors $\theta_{pen} < \theta_{opt}$, tandis que, si $1/2 < \theta_{opt} < 1$, alors $\theta_{pen} > \theta_{opt}$.

Logiciels commerciaux et applications industrielles de l'optimisation topologique

Voir la page web: <http://www.cmap.polytechnique.fr/~optopo/links.html>

