

## Modèles Déformables

Laurent COHEN

CEREMADE, URA CNRS 749, Université Paris-9 Dauphine  
Place du Maréchal de Lattre de Tassigny 75775 Paris cedex 16  
Tel. 01 44 05 46 78 Fax 01 44 05 45 99  
Cohen@ceremade.dauphine.fr  
<http://www.ceremade.dauphine.fr/~cohen>  
(mes principales publications sont disponibles sur le web)

### RÉSUMÉ

*Nous présentons une synthèse d'une partie de nos travaux sur les modèles déformables depuis une dizaine d'années. Cela comprend les contours actifs 2D et 3D, le modèle de ballon, la recherche de chemin minimal, la reconstruction de surface avec discontinuités et les modèles paramétriques déformables qui imposent une contrainte de forme. Nous montrons des exemples d'applications en particulier sur des images médicales.*

## 1 Introduction

Les contours actifs, introduits par Kass, Witkin et Terzopoulos [44], et de nombreuses variantes de ces modèles déformables ont été très étudiés depuis une dizaine d'années et utilisés pour de multiples applications. L'extraction d'une forme ou la reconstruction de surface à l'aide des modèles déformables est obtenue par la donnée d'une forme initiale et par minimisation d'une énergie composée d'un terme de régularisation interne et d'un terme de potentiel d'attraction aux données, comme illustré par exemple dans [77, 78, 13, 63, 44, 29, 20, 81, 76, 5, 2]. Ces méthodes ont été à l'origine d'un mouvement général vers une formalisation rigoureuse des problèmes de traitement d'images à l'aide de méthodes variationnelles ou d'autres méthodes de l'analyse fonctionnelle et des Equations aux Dérivées Partielles [1, 62, 23].

Du fait que les surfaces intéressantes en imagerie médicale sont en général des formes bien régulières, l'utilisation des modèles déformables est particulièrement intéressante pour déterminer les surfaces de frontières d'organes et de structures, et pour le suivi de déformations non rigides dans des séquences temporelles d'images. Nous avons commencé à utiliser les contours actifs pour détecter le contour du ventricule gauche du coeur dans des images IRM [22]. A la place d'un potentiel de gradient, nous avons défini un potentiel d'attraction à partir d'une image binaire de contours, utilisant une carte de distance ou une convolution.

Les principales difficultés du modèle étant l'initialisation et la minimisation, nous présentons plusieurs approches qui évitent au modèle de rester bloqué dans un minimum local. Nous avons défini le modèle de ballon [22] pour extraire un contour fermé autour d'un objet en étant moins exigeant pour la courbe initiale. Partant de presque n'importe quelle courbe à l'intérieur de l'objet permet de retrouver la frontière complète en gonflant la courbe comme un ballon (voir figure 2). Ce modèle a été utilisé dans une première approche pour faire de la reconstruction 3D à partir de coupes (voir figure 3). Un modèle 3D simplifié a été introduit comme une pile de ballons 2D se déformant simultanément [29]. Ces deux approches conviennent bien dans le cas de forme cylindrique. Pour reconstruire des surfaces 3D quelconques dans des images médicales 3D, nous avons généralisé les modèles de contours actifs et de ballon en 3D avec une implémentation par éléments finis dans [29, 20] (voir figure 4). La force de pression dans la direction normale est apparue par la suite comme l'équation d'évolution à la base de nombreux modèles de fronts de propagation [15, 57, 74]. Nous avons aussi utilisé récemment une approche de propagation de fronts pour résoudre de manière efficace la minimisation globale de l'énergie du contour actif [32]. Une troisième approche pour rendre les contours actifs moins sensibles à l'initialisation est de prendre en compte l'homogénéité de la région interne à la courbe. Cela combine des termes d'énergie de bords et de régions, de manière analogue à l'énergie de Mumford-Shah [27].

Bien que des approches basées sur des modèles généraux de surfaces déformables ont donné des résultats satisfaisants [29, 20], ils demandent des structures importantes et la résolution de grands systèmes linéaires. Cela est particulièrement difficile lorsque l'on s'intéresse à de larges quantités de données comme pour du suivi dans une séquence d'images 3D. C'est pourquoi une connaissance a priori sur la surface peut être utile, pour lui imposer des contraintes de forme (section 6), ou pour la décomposer en régions séparées par des discontinuités (section 5). Les modèles paramétriques sont bien adaptés pour imposer des contraintes globales. Cependant, une déformation locale supplémentaire est souvent nécessaire comme pour les superquadriques déformables [76, 18, 8] (voir section 6.2).

Nous avons aussi introduit une nouvelle formulation mathématique à de nombreux algorithmes itératifs à deux étapes pour les modèles déformables, comme les modèles paramétriques et les B-spline snakes [52, 5] à l'aide de variables auxiliaires [24].

## 2 Modèles déformables

### Reconstruction avec Régularisation

Nos travaux traitent de l'utilisation des modèles déformables et modèles paramétriques pour le traitement d'images, en particulier pour le problème de segmentation et reconstruction avec régularisation. Le problème général de la reconstruction d'une courbe ou surface  $v$  à partir de données  $u$  présegmentées se formalise par la minimisation par rapport à  $v$  de:

$$E(v, u) = \int R(v(s))ds + \int V(v(s), u(s))ds \quad (1)$$

où

- $R(v)$  mesure le lissage de la reconstruction  $v$  (courbe ou surface). On impose la régularité de  $v$ 
  - soit à travers le terme  $R(v)$  composé alors de dérivées de  $v$  dans le cas de courbe ou surface libre, il s'agit des modèles déformables les plus généraux;
  - soit en restreignant  $v$  à un ensemble de forme d'un certain type,  $R(v)$  est alors vide, c'est le cas de modèles paramétriques (Bsplines, superquadriques, hyperquadriques,...).
- $V$  mesure la fidélité de  $v$  à la donnée  $u$ . Il peut être
  - explicite:  $\int V(v, u) = \int \|v(s) - u(s)\|^2$
  - implicite:  $\int V(v, u) = \int P_u(v)$  où  $P_u$  est un Potentiel d'attraction.

Cette formulation s'applique à de nombreux domaines du traitement d'images incluant extraction de contours, segmentation, amélioration, restauration et mise en correspondance de signaux [65, 43, 77, 63, 13, 44, 79, 80, 41, 40].

### Modèles de Contours Actifs ou Snakes

Dans le cas des courbes planes, on recherche une courbe  $v(s) = (x(s), y(s))$  minimisant l'énergie:

$$v \mapsto E(v) = \int_{\Omega} w_1 \|v'(s)\|^2 + w_2 \|v''(s)\|^2 + P(v(s))ds \quad (2)$$

Cette énergie modélise des propriétés mécaniques intermédiaires entre un élastique (premier ordre) et une poutre (second ordre).

Partant d'une estimation initiale, on résoud alors l'équation d'évolution de type parabolique avec des conditions aux bords fixes ou périodiques:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial s} \left( w_1 \frac{\partial v}{\partial s} \right) + \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left( w_2 \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} \right) = F(v) \quad (3)$$

où  $F = -\nabla P$ , est la force d'attraction vers les contours. Cette équation revient à effectuer une descente d'énergie pour converger vers un minimum de (2).

### Surfaces minimisantes

Pour une surface déformable, l'énergie à minimiser est de la forme:

$$E(v) = \int_{\Omega} w_{10} \left\| \frac{\partial v}{\partial r} \right\|^2 + w_{01} \left\| \frac{\partial v}{\partial s} \right\|^2 + w_{20} \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \right\|^2 + w_{02} \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} \right\|^2 + 2w_{11} \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial s} \right\|^2 dx + \int_{\Omega} P(v) dx \quad (4)$$

Dans ce cas, on modélise une surface intermédiaire entre une membrane élastique (premier ordre, par exemple du plastique transparent alimentaire) et une plaque mince (second ordre, par exemple transparents pour projection, règle plate).

L'équation aux dérivées partielles à résoudre s'écrit:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial r} \left( w_{10} \frac{\partial v}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial s} \left( w_{01} \frac{\partial v}{\partial s} \right) + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left( w_{20} \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left( w_{02} \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} \right) + 2 \frac{\partial^2}{\partial r \partial s} \left( w_{11} \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial s} \right) = F(v) \quad (5)$$

### Résolution

L'existence de solutions régulières aux équations (3) et (5) pour une donnée initiale  $v_{t=0} = v_0$  est assurée car, quitte à lisser le potentiel  $P$ , la non linéarité  $F$  est définie sur un domaine borné et elle est Lipschitzienne. On résoud numériquement l'équation par différences finis ou éléments finis. On peut dans tous les cas écrire une itération en temps sous la forme d'un système:

$$(Id + \tau A)v^t = (v^{t-1} + \tau F(v^{t-1})) \quad (6)$$

où  $v^t$  représente le vecteur des inconnues (noeuds ou degrés de liberté) de la courbe ou surface à l'itération  $t$ .

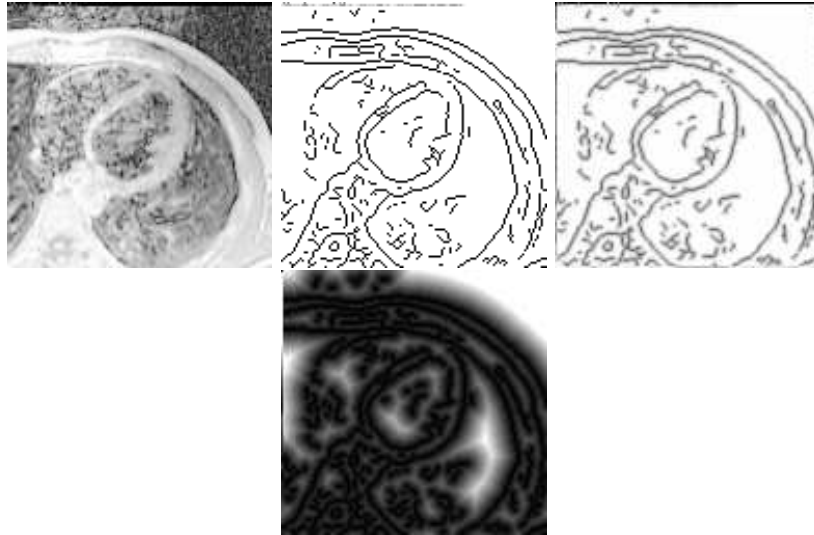


Figure 1: Image IRM du coeur: En haut à gauche, image originale; en haut à droite image de contours; en bas à gauche convolution de l'image de contours; en bas à droite carte de distance aux contours.

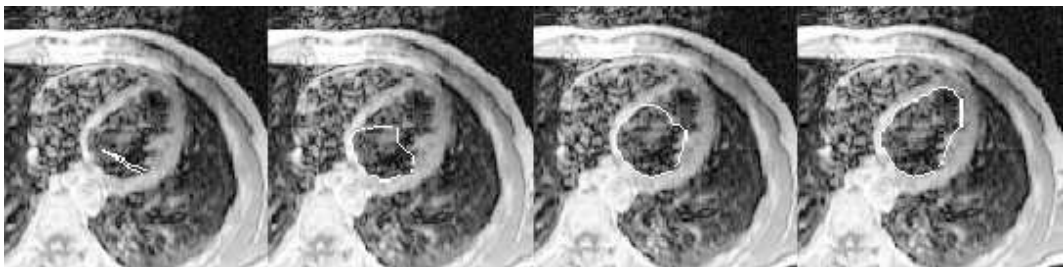


Figure 2: Image de Résonance Magnétique dans la région du coeur. Evolution de la courbe ballon pour détecter le ventricule gauche (extrait de [22]).

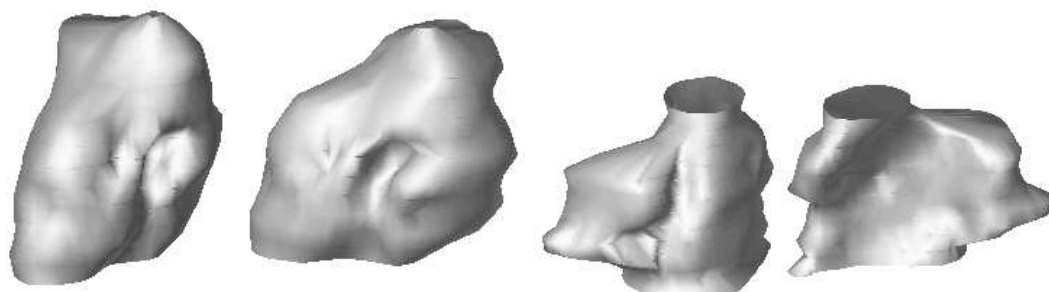


Figure 3: Deux vues de la reconstruction 3D de la cavité intérieure des ventricules gauche et droit (extrait de [22]).

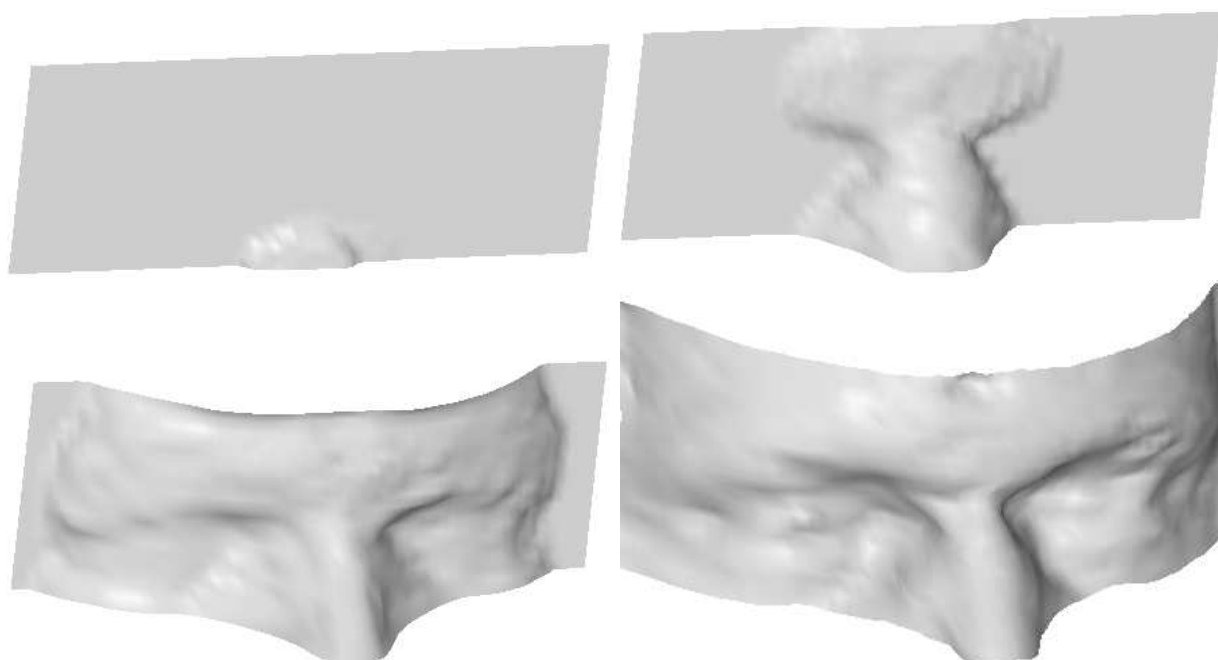


Figure 4: Illustration de la convergence de l'algorithme 3D vers un minimum de l'énergie. La condition initiale donnée est une surface plane (extrait de [29]).

### Modification des forces

Dans (6), tout se passe comme si on ajoute d'abord à  $v^{t-1}$  une force  $\tau F(v^{t-1})$ , puis on inverse  $(Id + \tau A)$ . Cette dernière opération correspond à un noyau de régularisation.

Le choix du pas de temps  $\tau$  est déterminant pour l'évolution de la courbe. S'il est trop petit, cela évolue trop lentement, s'il est trop grand, la force  $\tau F$  risque de passer par dessus le contour et de s'en éloigner. De plus, un  $\tau$  donné sera trop petit pour certains points et trop grand pour d'autres. Les auteurs de [44], faisaient varier ce pas de temps de manière interactive à l'aide d'un potentiomètre. D'autres auteurs ont aussi abordé ce problème différemment (voir [38, 12]).

Dans [22], on modifie la force  $F$  en la normalisant. Cela permet, en quelque sorte d'avancer avec un pas de temps défini localement en fonction du point de la courbe. De plus, on évalue  $F$  en chaque point par interpolation linéaire à partir des valeurs connues seulement sur un ensemble discret pour permettre à la courbe de se stabiliser autour d'un équilibre. La force s'écrit donc  $F = -k \frac{\nabla P}{\|\nabla P\|}$ , où  $P$  est le potentiel  $P(v) = -\|\nabla I(v)\|^2$ .

### Potentiel d'attraction $P$

Au lieu de prendre le potentiel  $P(v) = -\|\nabla I(v)\|^2$  introduit dans le modèle original [44], il s'est avéré plus intéressant d'utiliser un potentiel d'attraction à un ensemble de points de contours déjà extraits au préalable. En effet, le gradient n'étant pas constant en général le long d'un contour, cela permet d'uniformiser les contours leur donnant un poids d'attraction égal le long de

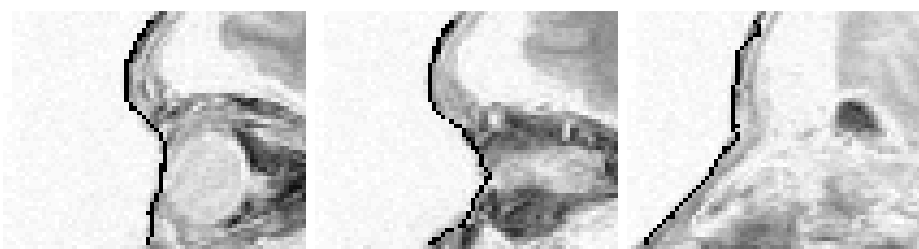


Figure 5: Superposition de quelques coupes verticales avec l'intersection de la surface finale (extrait de [29]).

ce bord. Cela peut éviter une concentration de noeuds en certains points de fort gradient et permet d'obtenir de meilleurs résultats. Par ailleurs, cette image de contours est en général disponible en même temps que l'image originale. De plus cela permet aussi de résoudre le problème dans le cas où la donnée est une image binaire de contours. Pour cela deux approches ont été utilisées:

- Convolution avec une Gaussienne ou
- Fonction de la distance de Chanfrein aux contours.

$$P(v) = g(d(v))$$

où  $d(v)$  est la distance entre un point  $v$  et le contour le plus proche et  $g$  une fonction croissante, par exemple,  $P(v) = -e^{-d(v)^2}$ . La distance de Chanfrein, une bonne approximation de cette carte de distance, peut être obtenue rapidement par un passage de filtres simples [14, 35].

On montre dans la figure 1 un exemple de carte de distance. On peut donner à ces différents potentiels une interprétation en termes de forces de tension de ressorts de longueur nulle au repos liés entre des points de la courbe et des points de données [29]. Remarquons que lorsqu'une fonction de la distance est utilisée, la force n'est plus normalisée, car c'est la fonction  $f$  qui définit la norme de la force  $F = -\nabla P$ .

### Force d'expansion

Pour converger vers la solution, on doit fournir manuellement une courbe initiale assez proche de la solution. Un mauvais choix de la valeur initiale peut conduire à une solution éloignée de celle désirée.

En effet:

- Un contour actif qui n'est pas suffisamment proche d'un contour n'est pas attiré par lui.
- Le modèle original des contours actifs, lorsqu'il n'est soumis à aucune force extérieure trouve l'équilibre en se réduisant, soit à un point, soit à un segment de droite, suivant les paramètres et conditions aux limites.

Ces remarques suggèrent d'ajouter à notre modèle de Contour Actif une force de gonflage qui permet au modèle de bien se comporter dans ces cas



[22].

La force devient alors:

$$F(v(s)) = k_1 \vec{n}(s) - k \frac{\nabla P}{\|\nabla P\|}(v(s)) \quad (7)$$

où  $\vec{n}(s)$  est le vecteur normal unitaire à la courbe au point  $v(s)$ .

La courbe se comporte comme un ballon qui est gonflé. Lorsqu'elle passe par des points de contour, elle est arrêtée si le contour est assez fort, ou passe par dessus s'il est trop faible par rapport à la force de gonflage. Cela évite à la courbe de rester bloquée par des points isolés erronés et rend le résultat beaucoup moins sensible à la donnée initiale. Cette idée m'est venu lors d'une discussion avec D. Lasry (ESI) qui travaillait sur la simulation du déclenchement de gonflage d'*airbag* de voiture lors d'accidents.

En se gonflant, la longueur de la courbe  $v(s)$  augmente et la discrétisation de  $v(s)$  devient insuffisante. En conséquence, on normalise régulièrement cette discrétisation quand la longueur varie trop.

Remarquons que cette force est le gradient dérivant d'un terme d'énergie interne surfacique:

$$E_{area} = -k_1 \int dA \quad (8)$$

mesurant l'aire à l'intérieur de la région délimitée par la courbe. La minimisation d'énergie correspond à avoir une région aussi grande que possible. Cela est obtenu par une force de pression poussant vers l'extérieur dans la direction normale.

De nombreuses études ont été faites récemment sur l'évolution des courbe planes soumises à une force d'expansion dans la direction normale à la courbe dans un cadre purement mathématique [39, 64, 69, 45, 68] puis dans de nombreuses applications au traitement d'images [55, 1, 67, 15, 56, 57, 16]. Remarquons aussi la similarité entre l'évolution d'une courbe plane soumise à une force d'expansion ( $k = 0$  dans (7)) avec une dilatation en morphologie mathématique.

L'évolution des courbes comme lignes de niveau d'une surface a permis la définition d'un modèle géométrique de contours actifs [15, 56, 57, 58] qui peut changer naturellement de topologie. D'autres modèles permettent aussi à la courbe ou surface de changer de topologie [51, 72, 73, 36, 59].

L'étude de l'évolution d'une forme par une équation soumise à des invariants [1] ou l'apparition de chocs dans d'autres cas (Espace Réaction-diffusion) [67, 46, 75] permet la caractérisation d'une forme.

L'introduction des B-Snakes [52] est assez proche de l'approche éléments finis dans l'esprit de réduire la minimisation à un espace de dimension finie. Cependant, la minimisation ne porte que sur l'énergie image sur des fonctions B-splines cubiques, compte tenu du fait que ces fonctions minimisent elles mêmes l'énergie de régularisation [5, 24]. Une autre définition des B-Snakes [60, 70] conservant le terme de lissage est en fait équivalente à notre formulation par éléments finis à la base de fonctions près.

### 3 Contours Actifs implicites

Voir [15, 56, 57, 16, 58, 75, 30, 32, 33, 31, 74]

Dans ce type d'approches, la courbe  $\mathcal{C}(s, t)$  est définie comme la ligne de niveau 0 d'une surface  $u(x, y, t)$ . On déforme ainsi la surface  $z = u(x, y)$  de manière à attirer sa ligne de niveau 0 vers les bas potentiels. La méthode d'Osher et Sethian [64] permet de résoudre une équation d'évolution définie pour la courbe  $\mathcal{C}(s, t)$  en la transformant en équation d'évolution pour la surface  $u$ .

Évolution d'une courbe plane:

$$\frac{\partial \mathcal{C}(s, t)}{\partial t} = P(\mathcal{C})(\kappa + w) \vec{n} = P(\mathcal{C})\left(\frac{\partial^2 \mathcal{C}}{\partial s^2} + w \vec{n}\right),$$

car  $\frac{\partial^2 \mathcal{C}}{\partial s^2} \equiv \kappa \vec{n}$ . L'approche par lignes de niveau demande la résolution de l'équation suivante:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = P(u) \|\nabla u\| (\kappa + w) = P(u) \|\nabla u\| \left( \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{\|\nabla u\|} \right) + w \right),$$

Les contours actifs géodésiques [16], introduits par la suite modélisent plus fidèlement les contours actifs classiques par l'équation d'évolution:

$$\frac{\partial \mathcal{C}(s, t)}{\partial t} = P(\mathcal{C}) \frac{\partial^2 \mathcal{C}}{\partial s^2} - \langle \nabla P, \vec{n} \rangle \vec{n},$$

qui est l'équation d'Euler de l'énergie

$$E(\mathcal{C}) = \int_{\Omega} P(\mathcal{C}(s)) ds,$$

où  $s$  est l'abscisse curviligne

Sa formulation par ligne de niveau demande la résolution de :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = P(u) \|\nabla u\| (\kappa + w) + \langle \nabla P, \nabla u \rangle,$$

**Régularisation par ajout d'une constante  $w$** 

Nous avons montré [31] que si  $P > 0$ , la courbure  $|\kappa| = \left\| \frac{\partial^2 \mathcal{C}}{\partial s^2} \right\|$  le long de la courbe géodésique minimisant

$$\int_{\Omega} P(\mathcal{C}(s)) ds,$$

$s$  étant l'abscisse curviligne, est bornée par

$$|\kappa| \leq \sup_{\Omega} \left\{ \frac{\|\nabla P\|}{P} \right\}.$$

Comme nous le verrons dans la section suivante, le terme régularisant peut être intégré dans le potentiel par l'ajout d'une constante. Dans ce cas, si  $P \geq 0$  et  $\tilde{P} = w + P$ , la courbure  $|\kappa|$  le long de la courbe géodésique minimisant  $\int_{\Omega} \tilde{P}(\mathcal{C}(s)) ds$  vérifie:

$$|\kappa| \leq \frac{\sup_{\mathcal{D}} \{\|\nabla P\|\}}{w}.$$

Pour réduire la borne et obtenir un effet régularisant:

- Lisser le potentiel pour réduire  $\sup_{\mathcal{D}} \{\|\nabla P\|\}$ .
- Augmenter  $w$

**4 Minimum global d'un contour actif par géodésiques**

voir références [32, 33, 30, 31]

Une nouvelle approche pour les modèles de contours actifs est introduite dans [31]. La détection du contour entre deux points est interprétée comme le chemin minimal entre ces deux points le long d'une surface. Toutes les méthodes de contours actifs déterminent un minimum local de l'énergie dépendant de la donnée initiale. Notre approche permet de trouver le minimum global de l'énergie du contour actif.

L'algorithme procède en deux étapes. La première, basée sur les travaux de Kimmel, Amir et Bruckstein [47], permet de définir par une approche d'évolution de fronts la valeur en chaque point de l'image du chemin minimal entre un point de départ donné et ce point. Cela correspond à une distance pondérée [48]. La méthode pour déterminer le plus court chemin le long

d'une surface entre un point de départ  $x_S$  et une destination  $x_D$  est présentée dans [47]. Il est montré que la projection sur le plan image des courbes de niveau de la distance géodésique sur  $\mathcal{S}$  à  $x_S$  peut être obtenue par un simple schéma d'évolution de courbes. Utilisant l'approche de propagation de fronts de Osher-Sethian [64], la fonction de distance  $\mathcal{M}_S$  à  $x_S$  sur  $\mathcal{S}$  est définie par la projection sur  $\mathbb{R}^2$  de ses courbes de niveau. Celles-ci sont identiques à l'évolution de la courbe de niveau zéro de la fonction  $\phi : \mathbb{R}^2 \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$  définie par l'équation d'évolution:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -V_N \|\nabla \phi\|. \quad (9)$$

où  $V_N$  est définie par des propriétés locales de la surface  $\mathcal{S}$  et de  $\phi$ .

Nous appliquons ces idées à notre problème pour trouver une courbe d'action minimale par rapport à un potentiel. L'énergie du nouveau modèle est de la forme:

$$E : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R} \quad (10)$$

$$\mathcal{C} \mapsto E(\mathcal{C}) = \int_{\Omega} w \|\mathcal{C}_s(s)\|^2 + P(\mathcal{C}(s)) ds = \int_{\Omega} \tilde{P}(\mathcal{C}(s)) ds = wL + \int_{\Omega} P(\mathcal{C}(s)) ds$$

Ici  $\mathcal{A}$  est l'espace de toutes les courbes reliant les deux points donnés:  $\mathcal{C}(0) = p_0$  et  $\mathcal{C}(L) = p_1$ , et  $L$  est la longueur de la courbe. Contrairement aux snakes classiques,  $s$  représente ici l'abscisse curviligne. L'énergie ne dépend donc que de l'arc géométrique et plus de la paramétrisation. Le terme régularisant comportant  $w$  mesure maintenant exactement la longueur de la courbe. Ce changement de potentiel est d'autant plus justifié qu'il a été montré par ailleurs que la minimisation de l'énergie des contours actifs classiques est équivalente à la recherche d'une géodésique pour une métrique proche de la notre [16]. Cependant ces derniers auteurs ne donnent pas de méthode pour obtenir effectivement le minimum global.

L'algorithme utilisé ici peut être soit une approche de propagations de front du type Osher-Sethian [64] soit par l'algorithme de Shape from Shading de Rouy-Tourin [66].

Dans un deuxième temps on redescend simplement à partir du point de destination jusqu'au point de départ pour tracer le chemin minimal qui les relie.

Cela s'applique bien sûr au problème des contours actifs avec les deux bords fixes. Cependant, nous pouvons aussi appliquer cette approche à un contour fermé en ne donnant qu'un seul point de départ. Un second point est alors trouvé sur le contour fermé tel que deux chemins minimaux relient

ces points. Ce point est déterminé par un test de point selle. Le contour complet est obtenu en suivant les deux chemins minimaux reliant ces deux points.

On montre les résultats sur une image de routes (figures 6) pour trouver le chemin reliant deux points. Comme les routes sont les zones les plus claires de l'image, nous utilisons comme potentiel l'opposé de l'image en niveau de gris. Remarquer dans l'image d'action minimale (en bas à droite de la figure 6) comment les lignes de fronts se déplacent plus vite le long de la route.

Dans la figure 6, plusieurs chemins sont trouvés simultanément à partir de la même image d'action minimale. Nous utilisons le Fast Marching, un nouvel algorithme rapide d'évolution de fronts, introduit par Sethian [30].

## 5 Contours actifs et segmentation en régions

voir référence [27]

Les modèles de contours actifs ne prennent en compte que l'information le long d'une courbe et cela bloque parfois son évolution à cause de minima locaux. Nous prenons ici en compte le fait que le contour délimite une région homogène en introduisant un terme surfacique sur l'intérieur de la région définie par le contour. On définit ainsi le problème de reconstruction d'une surface composée de deux types de régions de régularités différentes. La frontière entre les régions, représentée par une courbe fermée est déterminée à l'aide d'un modèle de contour actif. Cela combine les deux problèmes de reconstruction de surface avec discontinuité et détection de contour. On minimise pour cela une énergie fonction du couple d'inconnues (surface  $u$ , courbe frontière  $v$ ). Nous avons appliqué ce modèle à deux types d'images, un Modèle Numérique de Terrain avec un lac et une image médicale avec région d'intérêt (ventricules du cerveau).

Une surface **lac** est caractérisée par les propriétés géométriques suivantes: discontinuité de tangente au bord, surface horizontale, le bord est à un niveau supérieur au lac. L'image est segmentée en deux régions: l'intérieur du lac  $L$ , qui est une région constante, le fond ( $R - L$ ) qui doit être lissé. On définit ainsi une solution utilisant un modèle intermédiaire entre Mumford & Shah [63] et Morel & Koepfler [61, 50, 49] où on doit trouver: un bord fermé  $B$  séparant le lac du fond, le niveau du lac  $u_0$ , c'est la valeur constante de  $u$  à l'intérieur, l'image lissée  $u$  à l'extérieur du lac, préservant les contraintes

de bord. La minimisation d'une énergie globale permet l'interaction directe des termes de surface et de contour actif (voir figure 7). L'initialisation du contour est ainsi facilitée ([27]).

$$\begin{aligned}
 E_g(u, v) &= E_{snake}(v) + E_{lake}(u, v) + E_{outside}(u, v) \\
 &= E_{snake}(v) + \int_L (u_0 - d(x, y))^2 dx dy + \\
 &\quad \int_{R-L} (u - d)^2 + \lambda^2 \int_{R-L} \|\nabla u\|^2 + \int_{\Gamma} (u - u_0)^2
 \end{aligned} \tag{11}$$

où  $\Gamma$  correspond aux points du bord  $B$  déterminés par le "snake", tels que  $(u - u_0) < 0$ .

L'algorithme minimise de manière alternée l'énergie  $E_g$  par rapport aux deux variables  $u$  et  $v$ . A  $u$  fixée, la minimisation en  $v$  correspond à l'évolution d'un snake auquel des forces extérieures sont ajoutées dérivant des autres termes d'énergie surfaciques. Cela permet de tenir compte de l'information niveau de gris à l'intérieur de la courbe pour segmenter une région homogène. Ces forces supplémentaires évitent à la courbe d'être bloquée par des contours intermédiaires.

La courbe  $v$  étant fixée, la régularisation pour  $u$  est simple, la constante  $u_0$  est la valeur moyenne à l'intérieur de la région définie par la courbe, la valeur de  $u$  à l'extérieur est obtenue par régularisation classique.

## 6 Modèles paramétriques Déformables

Nous avons illustré la capacité des modèles déformables 2D et 3D pour définir une description locale des structures apparaissant dans les images. Cette modélisation locale ne permet pas de contraindre la forme globale des courbes pour imposer des formes génériques. L'utilisation de courbes et surfaces paramétriques (cercles, paraboles, segments dans [81], ellipses dans [42], voir une étude complète dans [11]) permet de définir des contraintes globales sur la forme de la structure que nous cherchons à caractériser tout en utilisant le même type de potentiel d'attraction. On minimise donc l'intégrale de  $P$  le long de cette courbe définie par un petit nombre de paramètres. Par conséquent, nous pouvons à l'aide de modèles de superquadriques ou d'hyperquadriques incorporer une connaissance a priori de la structure et de plus disposer d'une description de la structure 2D ou 3D par le biais de quelques paramètres. Ces modèles permettent de retrouver des informations manquantes et donne une représentation stable et compacte des données mais ne peuvent modéliser des propriétés lo-

cales. Nous présentons deux approches permettant d'affiner localement le modèle paramétrique après avoir obtenu une première estimation globale de la forme. Ces modèles sont basés sur une définition implicite de formes, pour des modèles basés sur une décomposition de Fourier ou par apprentissage, voir [37, 71, 34, 54, 53].

## 6.1 Hyperquadriques

voir référence [18]

Nous avons étudié des modèles paramétriques permettant à la fois de décrire des propriétés globales et locales : les hyperquadriques hybrides.

Une hyperquadrique est définie par l'ensemble des points  $(x, y, z)$  vérifiant l'équation :

$$H(x, y, z) = \sum_{i=1}^N |a_i x + b_i y + c_i z + d_i|^{\gamma_i} = 1. \quad (12)$$

où  $a_i, b_i, c_i, d_i$  et  $\gamma_i$  sont des constantes et  $N$  représente le nombre de formes affines utilisées dans la description. Ce modèle permet de considérer un nombre arbitraire  $N$  de formes affines et de modéliser des structures non symétriques. Ces surfaces ne sont régulières que pour  $\gamma_i > 1$ . Dans ce cas, les formes obtenues sont convexes.

En complétant cette description à l'aide d'exponentielles d'hyperquadriques ( $e^{-H}$ ), nous pouvons modéliser certaines propriétés locales et introduire des concavités. Ainsi, le modèle hybride est défini par l'équation implicite :

$$H(x, y, z) = \sum_{i=1}^N |K_i|^{\gamma_i} + \sum_{j=1}^M c_j e^{-\sum_{l=0}^{L_j} |K_{jl}|^{\gamma_{jl}}} = 1, \quad (13)$$

où les  $K_i, K_{jl}$  sont des formes affines de  $\mathbb{R}^3$  et  $M$  représente le nombre de concavités utilisées, décrites par des hyperquadriques à  $L_j$  termes. Le modèle est ainsi défini à l'aide de  $5 \times (N + \sum_{j=1}^M L_j)$  paramètres. Ces paramètres caractérisent la forme de la courbe ou de la surface et permettent d'identifier les structures représentées. Notre approche permet, à l'aide d'une étude géométrique des propriétés du modèle, de définir des termes supplémentaires n'introduisant qu'une déformation locale de la forme, permettant ainsi l'insertion de concavités [19].

## 6.2 Superquadriques et Déformations Libres (*Free-Form Deformation*)

voir référence [10],

Les superquadriques sont une généralisation des coniques avec des exposants quelconques et un cas particulier d'hyperquadriques:

$$F(x, y, z) = \left( \left( \left( \frac{x}{a_1} \right)^{2/\epsilon_2} + \left( \frac{y}{a_2} \right)^{2/\epsilon_2} \right)^{\epsilon_2/\epsilon_1} + \left( \frac{z}{a_3} \right)^{2/\epsilon_1} \right)^{\epsilon_1/2} = 1. \quad (14)$$

La représentation d'un nuage de points non structurés par une surface de type superquadrique est intéressante dans la mesure où d'une part la surface est déterminée par 11 paramètres et d'autre part, on peut donner facilement un maillage de la surface pour la visualiser ou la faire évoluer sur les données.

Les surfaces issues de l'imagerie médicale sont cependant trop complexes pour être décrites uniquement par des superquadriques. Pour ajuster au mieux le modèle sur les données, une déformation libre est ajoutée (**free-form deformation** introduite par Sederberg et Parry en synthèse d'images), c'est-à-dire un produit tensoriel tri-dimensionnel de courbes B-splines:

$$\mathbf{X} = \sum_{i,j,k=0}^{l,m,n} C_l^i C_m^j C_n^k (1-s)^{l-i} s^i (1-t)^{m-j} t^j (1-u)^{n-k} u^k \mathbf{P}_{ijk} \quad (15)$$

où  $s$ ,  $t$  et  $u$  sont les coordonnées locales de  $\mathbf{X}$  dans la boîte des points de contrôle  $\mathbf{P}_{ijk}$ . Pour cela on itère à partir d'une donnée initiale l'algorithme de minimisation suivant:

1: Calcul du champ de déplacement:  $X_n^a = X_n + \delta X_n$

2: Points de contrôle  $P_{n+1}$  par minimisation de  $\|BP - X_n^a\|^2$

$$X_{n+1} = BP_{n+1}$$

Les résultats obtenus sur des données cardiaques, illustrés par la figure 9, se sont révélés très encourageants. En effet pour représenter un nuage d'environ 6000 points 3D, un modèle décrit par 130 points 3D (boîte 5x5x5) est globalement satisfaisant, soit un facteur de compression de 46. Cette approche s'applique parfaitement au suivi de la déformation de la surface dans une suite d'images temporelle (voir figure 10). Le premier modèle utilise une superquadrique mais ensuite le résultat pour la surface



$n$  est obtenu par déformation de la surface précédente  $n - 1$ . Cela permet d'obtenir une estimation du mouvement en chaque point de la surface et ainsi de détecter d'éventuelles régions pathologiques nécrosées pour lesquelles le déplacement est faible. Un modèle de référence peut aussi être utilisé de manière indépendante pour chaque donnée.

## Remerciements

Certains des travaux présentés ont été effectués en collaboration avec Nicholas Ayache, Isaac Cohen, Eric Bardinet et Ron Kimmel. Je voudrais les remercier et exprimer mes souhaits pour que ces collaborations fructueuses se poursuivent.

## 7 Bibliographie

- [1] L. Alvarez, F. Guichard, P.L. Lions, and J.M. Morel. Axiomes et équations fondamentales du traitement d'images. (analyse multiéchelle et e.d.p.). *C.R. Acad. Sci. Paris Série I*, 315:135–138, 1992.
- [2] N. Ayache. Medical computer vision, virtual reality and robotics. *Image and Vision Computing*, 13(4):295–313, August 1995.
- [3] N. Ayache, J.D. Boissonnat, E. Brunet, Laurent Cohen, J.P. Chièze, B. Geiger, O. Monga, J.M. Rocchisani, and P. Sander. Building highly structured volume representations in 3D medical images. In *Computer Aided Radiology*, Juin 1989. Berlin, West-Germany.
- [4] N. Ayache, J.D. Boissonnat, Laurent Cohen, B. Geiger, O. Monga, J. Levy-Vehel, and P. Sander. Steps toward the automatic interpretation of 3D images. *NATO ASI Series on 3D Imaging in Medicine*, F 60:107–120, 1990.
- [5] N. Ayache, P. Cinquin, I. Cohen, Laurent Cohen, F. Leitner, and O. Monga. Segmentation of complex 3D medical objects: a challenge and a requirement for computer assisted surgery planning and performing. In R. Taylor and S. Lavalée, editors, *Computer Integrated Surgery*, pages 59–74. MIT Press, 1995.

- [6] E. Bardinet, Laurent D. Cohen, and N. Ayache. A parametric deformable model to fit unstructured 3D data. Technical Report 2617, INRIA, July 1995. To appear in CVIU.
- [7] E. Bardinet, Laurent D. Cohen, and N. Ayache. Tracking and motion analysis of the left ventricle with deformable superquadrics. *MEDIA, Medical Image Analysis, an international journal on Computer Vision, Visualisation and Image Guided Intervention in Medicine*, 1(2):129–149, 1996.
- [8] E. Bardinet, Laurent D. Cohen, and N. Ayache. Tracking medical 3D data with a deformable parametric model. In *Proc. Third European Conference on Computer Vision (ECCV'96)*, pages I:317–328, Cambridge, U. K., April 1996.
- [9] E. Bardinet, Laurent D. Cohen, and N. Ayache. Suivi de données médicales 3d avec un modèle paramétrique déformable. *Journal TSI, Technique et Science Informatiques*, 16(3/97), Mars 1997.
- [10] Eric Bardinet, Laurent D. Cohen, and Nicholas Ayache. Fitting 3D data using superquadrics and free-form deformations. In *Proceedings of the 12th IEEE International Conference on Pattern Recognition (ICPR'94)*, pages A–79–83, Jerusalem, October 1994.
- [11] Benedicte Bascle. *Contributions et applications des modèles déformables en Vision par Ordinateur*. PhD thesis, Université de Nice Sophia Antipolis, Juillet 1994.
- [12] M.O. Berger. *Les contours actifs: modélisation, comportement et convergence*. PhD thesis, Institut Polytechnique de Lorraine, Février 1991.
- [13] Andrew Blake and Andrew Zisserman. *Visual Reconstruction*. The MIT Press, 1987.
- [14] Gunilla Borgefors. Distance transformations in arbitrary dimensions. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 27:321–345, 1984.
- [15] V. Caselles, F. Catté, T. Coll, and F. Dibos. A geometric model for active contours. *Numerische Mathematik*, 66:1–31, 1993.
- [16] V. Caselles, R. Kimmel, and G. Sapiro. Geodesic active contours. In *Proc. Fifth IEEE International Conference on Computer Vision*

(*ICCV'95*), pages 694–699, Cambridge, USA, June 1995. Long version to appear in *International Journal of Computer Vision*.

- [17] P. Clarysse, F. Poupon, B. Barbier, and I. Magnin. 3D boundary extraction of the left ventricle by a deformable model with a priori information. In *Proceedings IEEE International Conference on Image Processing*, Arlington, Virginia, October 1995.
- [18] Isaac Cohen and Laurent D. Cohen. A hybrid hyperquadric model for 2-D and 3-D data fitting. In *Proceedings of the 12th IEEE International Conference on Pattern Recognition (ICPR'94)*, pages B-403–405, Jerusalem, October 1994. Part of Inria TR 2188.
- [19] Isaac Cohen and Laurent D. Cohen. A hybrid hyperquadric model for 2-D and 3-D data fitting. *Computer Vision and Image Understanding*, 63(3):527–541, May 1996.
- [20] Isaac Cohen, Laurent D. Cohen, and Nicholas Ayache. Using deformable surfaces to segment 3-D images and infer differential structures. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing: Image Understanding*, 56(2):242–263, September 1992.
- [21] Laurent D. Cohen. On active contour models. In *Active perception and Robot vision*. Springer, July 1989.
- [22] Laurent D. Cohen. On active contour models and balloons. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing: Image Understanding*, 53(2):211–218, March 1991. INRIA TR 1075, August 1989.
- [23] Laurent D. Cohen. *Méthodes Variationnelles pour le Traitement d'images*. Université Paris Dauphine, 1995. Mémoire d'Habilitation à diriger des recherches. Accompagné des 10 publications les plus significatives des années 1988-1995.
- [24] Laurent D. Cohen. Auxiliary variables and two-step iterative algorithms in computer vision problems. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 6(1):61–86, January 1996. See also ICCV'95.
- [25] Laurent D. Cohen. Deformable surfaces and parametric models to fit and track 3d data. conférence invitée à la session 3D shape Recovery and Analysis. In *IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics*, Beijing, China, Oct 1996.

- [26] Laurent D. Cohen. Avoiding local minima for deformable curves in image analysis. In *Curves and Surfaces with Applications in CAGD*, pages 77–84. A. Le Méhauté, C. Rabut, and L. L. Schumaker (eds.), 1997.
- [27] Laurent D. Cohen, Eric Bardinet, and Nicholas Ayache. Surface reconstruction using active contour models. In *Proceedings SPIE 93 Conference on Geometric Methods in Computer Vision, Vol. 2031*, pages 38–50, San Diego, CA, July 1993. INRIA TR 1824, December 1992.
- [28] Laurent D. Cohen and Isaac Cohen. A finite element method applied to new active contour models and 3D reconstruction from cross sections. In *Proc. Third IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV'90)*, pages 587–591, Osaka, Japan, December 1990.
- [29] Laurent D. Cohen and Isaac Cohen. Finite element methods for active contour models and balloons for 2-D and 3-D images. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI-15(11):1131–1147, November 1993.
- [30] Laurent D. Cohen and R. Kimmel. Fast marching the global minimum of active contours. Conférence invitée à la session Partial Differential Equations. In *IEEE International Conference on Image Processing (ICIP'96)*, Lausanne, Suisse, September 1996.
- [31] Laurent D. Cohen and R. Kimmel. Global minimum for active contour models: A minimal path approach. *International Journal of Computer Vision*, 24(1), 1997. A paraitre.
- [32] Laurent D. Cohen and Ron Kimmel. Global minimum for active contour models: A minimal path approach. In *Proc. IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR'96)*, pages 666–673, San Francisco, USA, June 1996. to appear in IJCV.
- [33] Laurent D. Cohen and Ron Kimmel. Regularization properties for minimal geodesics of a potential energy. In *Proc. 12th International Conference on Analysis and Optimization of Systems: Images, Wavelets and PDE's (ICAOS'96)*, Paris, France, June 1996.
- [34] T. Cootes, A. Hill, C. Taylor, and J. Haslam. Use of active shape models for locating structure in medical images. *Image and Vision Computing*, 12(6):355–365, July 1994.

- [35] P. E. Danielsson. Euclidean distance mapping. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 14:227–248, 1980.
- [36] Salim Djeziri. *Segmentation d'images fondée sur une méthode de croissance de régions contrôlée par un modèle géométrique de contours*. PhD thesis, Université Paris XII- Val de Marne, Novembre 1994.
- [37] J.S. Duncan, R.L. Owen, L.H. Staib, and P. Anandan. Measurement of non-rigid motion using contour shape descriptors. In *Proc. IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR'91)*, pages 318–324. IEEE Computer Society Conference, June 1991. Lahaina, Maui, Hawaii.
- [38] Pascal Fua. *Une approche Variationnelle pour la reconnaissance d'objets*. PhD thesis, Université d'Orsay, Sept. 1989.
- [39] M. Gage and R.S. Hamilton. The heat equation shrinking convex plane curves. *J. Differential Geometry*, 23:69–96, 1986.
- [40] D. Geiger and A.L. Yuille. A common framework for image segmentation. *International Journal of Computer Vision*, 6(3):227–234, August 1991.
- [41] D. Geman and C. Yang. Nonlinear image recovery with half-quadratic regularization. *IEEE Transactions on Image Processing*, 4(7):932–946, July 1995.
- [42] Anne Gorre. Etude de quelques problèmes liés au modèles de contours actifs. Technical report, INRIA, Septembre 1992. Rapport de DEA Dauphine.
- [43] W.E.L. Grimson. *From Images to Surfaces: A computational study of the Human Early vision system*. The MIT Press, 1981.
- [44] Michael Kass, Andrew Witkin, and Demetri Terzopoulos. Snakes: Active contour models. *International Journal of Computer Vision*, 1(4):321–331, 1988.
- [45] B.B. Kimia, A. R. Tannenbaun, and S.W. Zucker. On the evolution of curves via a function of curvature, 1 : the classical case. *J. Math Anal. Appl.*, 163(2), 1992.

- [46] B.B. Kimia, A. R. Tannenbaun, and S.W. Zucker. Shapes, shocks and deformations, I: the components of shape and the reaction-diffusion space. *International Journal of Computer Vision*, 1995.
- [47] R. Kimmel, A. Amir, and A. Bruckstein. Finding shortest paths on surfaces using level sets propagation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI-17(6):635–640, June 1995.
- [48] R. Kimmel, N. Kiryati, and A. M. Bruckstein. Distance maps and weighted distance transforms. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, May 1996. Special Issue on Topology and Geometry in Computer Vision.
- [49] G. Koepfler, C. Lopez, and J.M. Morel. A multiscale algorithm for image segmentation by variational method. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 31(1), february 1994.
- [50] G. Koepfler, J.M. Morel, and S. Solimini. Segmentation by minimizing a functional and the “merging” methods. In *Proceedings of GRETSI*, pages 1033–1036, Juan-les-Pins, September 1991.
- [51] F. Leitner and P. Cinquin. Dynamic segmentation: Detecting complex topology 3D-object. In *Proceedings of International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society*, pages 295–296, Orlando, Florida, November 1991.
- [52] F. Leitner, I. Marquet, S. Lavallée, and P. Cinquin. Dynamic segmentation: finding the edge with snake-splines. In *Proceedings of International Conference on Curves and Surfaces*, pages 1–4, Chamonix, France, June 1990. Academic Press.
- [53] B. Leroy, I. Herlin, and Laurent Cohen. Face identification by deformation measure. In *Proc. 13th IEEE International Conference on Pattern Recognition (ICPR'96)*, Vienne, Austria, August 1996.
- [54] B. Leroy, I. Herlin, and Laurent Cohen. Multi-resolution algorithms for active contour models. In *Proc. 12th International Conference on Analysis and Optimization of Systems: Images, Wavelets and PDE's (ICAOS'96)*, Paris, France, June 1996.
- [55] F. Leymarie and M. D. Levine. Tracking deformable objects in the plane using an active contour model. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 15(6):617–634, 1993.

- [56] R. Malladi, J. A. Sethian, and B. C. Vemuri. Evolutionary fronts for topology-independent shape modeling and recovery. In *Proc. Third European Conference on Computer Vision*, pages 3–13, Stockholm, Sweden, May 1994.
- [57] R. Malladi, J. A. Sethian, and B. C. Vemuri. Shape modeling with front propagation: A level set approach. *IEEE Trans. on PAMI*, 17(2):158–175, february 1995.
- [58] R. Malladi, J. A. Sethian, and B. C. Vemuri. A fast level set based algorithm for topology independent shape modeling. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, May 1996. special issue on Topology and Geometry in Computer Vision, Ed. A. Rosenfeld and Y. Kong.
- [59] T. McInerney and D. Terzopoulos. Medical image segmentation using topologically adaptable snakes. In Springer, editor, *Proceedings of the First International Conference on Computer Vision, Virtual Reality, and Robotics in Medicine CVRMed'95*, pages 92–101, Nice, France, April 1995. See also ICCV'95, 840–845.
- [60] Sylvie Menet, Philippe Saint-Marc, and Gerard Medioni. B-snakes: Implementation and application to stereo. In *Proceedings of the Seventh Israeli Conference on Artificial Intelligence and Computer Vision*, pages 227–240, Tel aviv, Israel, December 1990.
- [61] Jean-Michel Morel and Sergio Solimini. Segmentation d'images par méthode variationnelle: une preuve constructive d'existence. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 1988.
- [62] Jean-Michel Morel and Sergio Solimini. *Variational methods in image segmentation*. Birkhauser, 1993.
- [63] D. Mumford and J. Shah. Boundary detection by minimizing functionals. In *Proceedings of Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 22–26, San Francisco, June 1985.
- [64] S. J. Osher and J. A. Sethian. Fronts propagation with curvature dependent speed: Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. *Journal of Computational Physics*, 79:12–49, 1988.
- [65] T. Poggio, H. Voohrees, and A. Yuille. A regularized solution to edge detection. *Journal of Complexity*, 4:106–123, 1988.

- [66] E. Rouy and A. Tourin. A viscosity solutions approach to shape-from-shading. *SIAM. J. Numer. Analy.*, 29:867–884, 1992.
- [67] G. Sapiro and A. Tannenbaum. On invariant curve evolution and image analysis. *Indiana University Mathematics Journal*, 42(3):985–1009, 1993.
- [68] G. Sapiro and A. Tannenbaum. On affine plane curve evolution. *Journal of Functional Analysis*, 119(1):79–120, 1994.
- [69] J. A. Sethian. A review of recent numerical algorithms for hypersurfaces moving with curvature dependent flows. *J. Differential Geometry*, 31:131–161, 1989.
- [70] S. Sinha and B. Schunk. Surface approximation using weighted splines. In *Proc. IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR'91)*, Maui, Hawaii, June 1991.
- [71] L. Staib and J. Duncan. Deformable Fourier models for surface finding in 3D images. In R. Robb, editor, *Proceedings of Visualization in Biomedical Computing (VBC'92)*, volume 1808 of *SPIE*, Chapel Hill, North Carolina, October 1992.
- [72] R. Szeliski and D. Tonnesen. Surface modeling with oriented particle systems. In *SIGGRAPH'92 Conference Proceedings Computer Graphics*, pages 185–194, Chicago, IL, July 1992.
- [73] R. Szeliski, D. Tonnesen, and D. Terzopoulos. Curvature and continuity control in particle-based surface models. In *Proceedings SPIE 93 Conference on Geometric Methods in Computer Vision, Vol. 2031*, pages 172–181, San Diego, CA, July 1993.
- [74] H. Tek and B. Kimia. Image segmentation by reaction-diffusion bubbles. In *Proc. Fifth IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV'95)*, pages 156–162, Cambridge, USA, June 1995.
- [75] H. Tek and B.B. Kimia. Shock based reaction-diffusion bubbles for image segmentation. Technical Report LEMS-138, Division of Engineering, Brown University, August 1994.
- [76] D. Terzopoulos and D. Metaxas. Dynamic 3D models with local and global deformations: deformable superquadrics. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 13(7):703–714, 1991.



- [77] Demetri Terzopoulos. The computation of visible-surface representations. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI-10(4):417–438, July 1988.
- [78] Demetri Terzopoulos, Andrew Witkin, and Michael Kass. Symmetry-seeking models for 3D object reconstruction. *International Journal of Computer Vision*, 1(3):211–221, October 1987.
- [79] Demetri Terzopoulos, Andrew Witkin, and Michael Kass. Constraints on deformable models: recovering 3D shape and nonrigid motion. *AI Journal*, 36:91–123, 1988.
- [80] Isaac Weiss. Shape reconstruction on a varying mesh. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI-12(4), April 1990.
- [81] A.L. Yuille, P.W. Hallinan, and D.S. Cohen. Feature extraction from faces using deformable templates. *International Journal of Computer Vision*, 8(3), September 1993.

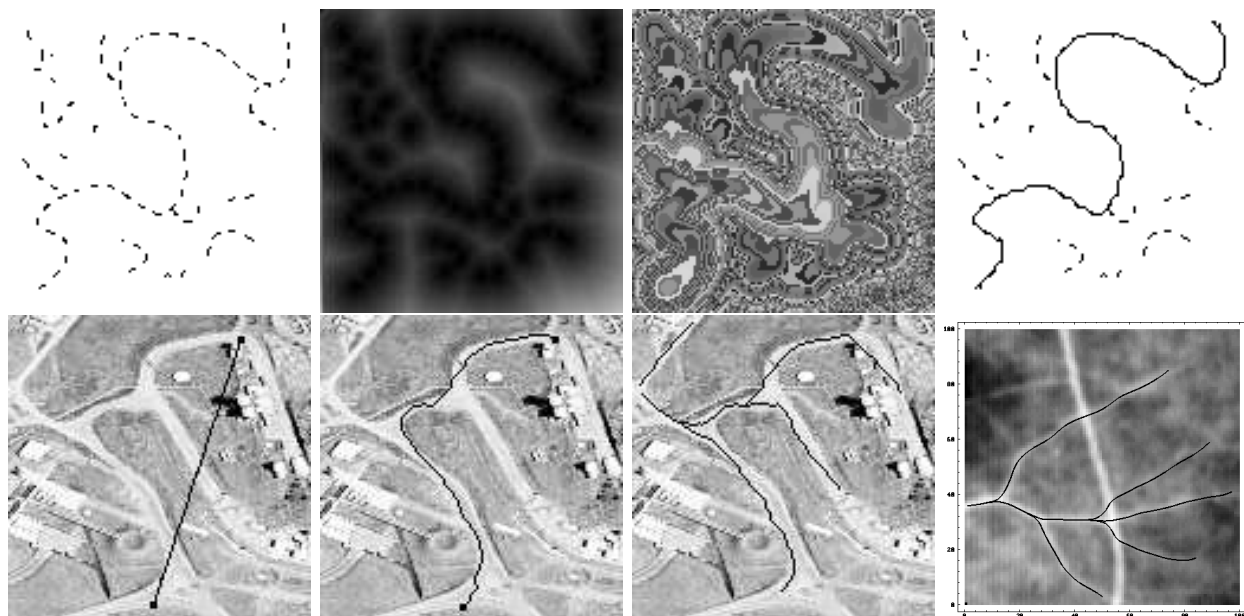


Figure 6: En haut: de gauche à droite, original, potentiel, action minimale  $U$  (une table de couleurs aléatoire est utilisée pour mieux visualiser la propagation des courbes de niveau du point de départ en bas à gauche) et chemin minimal entre les extrémités. En bas: de gauche à droite, extrémités sur l'image originale, chemin minimal, plusieurs chemins minimaux sont obtenus simultanément à partir d'un même point de départ. Cela permet d'extraire l'ensemble des routes et l'ensemble des vaisseaux dans l'image de fond de l'oeil à droite (extrait de [31]).

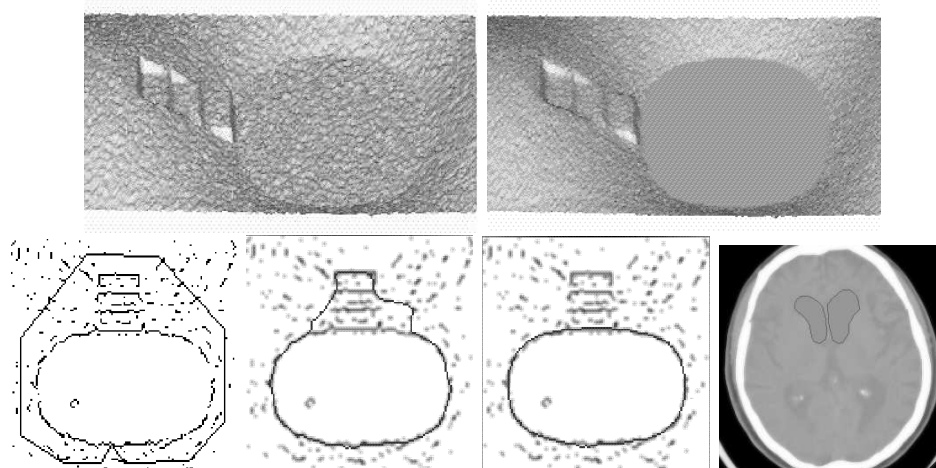


Figure 7: Modèle Numérique de Terrain avec un lac: image bruitée et reconstruction, Ventricules du cerveau (extrait de [27]).

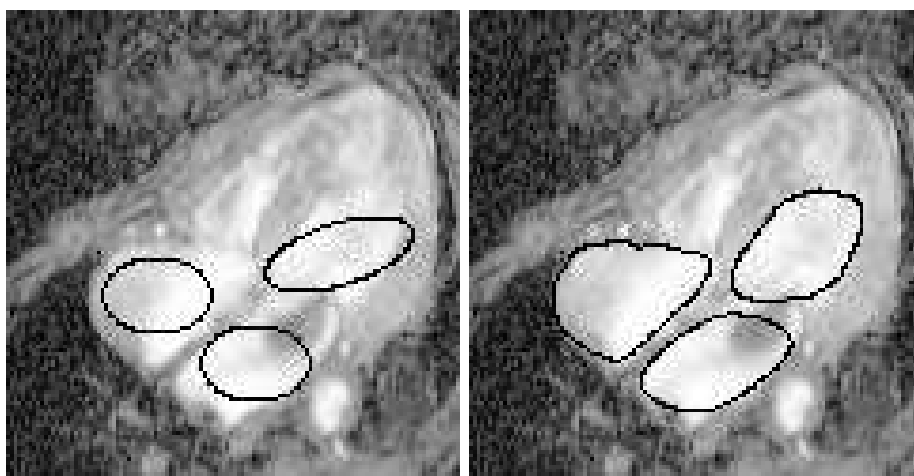


Figure 8: Extraction des contours des cavités du coeur dans une image IRM à l'aide d'hyperquadriques 2-D (extrait de [18]).

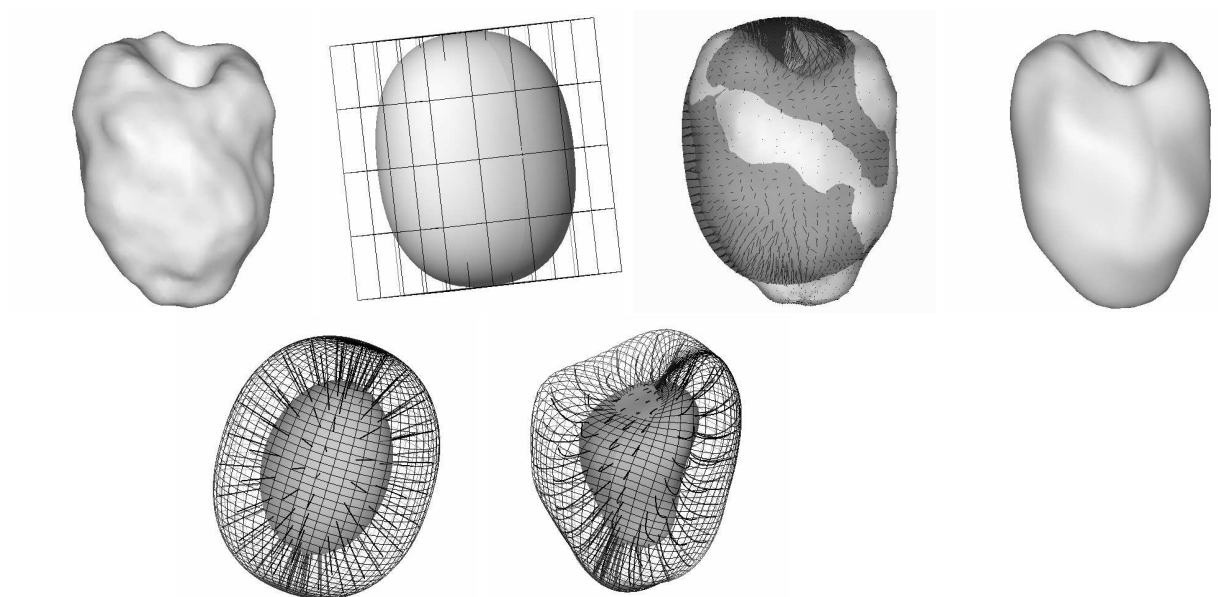


Figure 9: Etapes de la reconstruction. En haut, de gauche à droite, les données, la superquadrique et la boîte initiale de points de contrôle, le champs de déplacement à partir de la superquadrique (étape 1.) et le modèle final après minimisation (étape 2.); Le taux de compression est de 48 (extrait de [10]). Au dessous, déformation volumique entre les deux surfaces épicarde et endocarde (extrait de [6]).

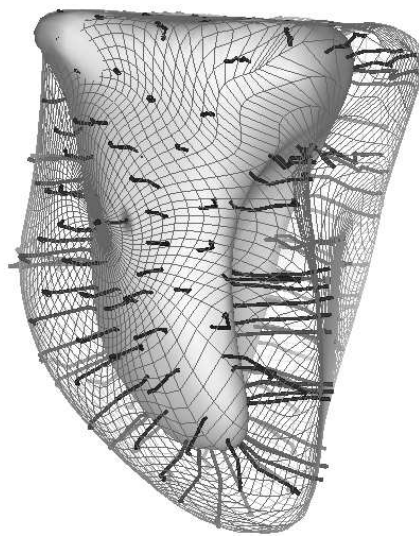


Figure 10: Trajectoires des points du modèle pendant un cycle cardiaque. Les deux surfaces représentent le modèles en positions extrêmes diastole (dilatation) et systole (contraction) (extrait de [6]).