

Convergence en distribution

Rappel. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. et X une v.a. dans l'espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) . La suite $(X_n)_n$ converge en distribution (ou en loi) vers X si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$$

en tout point de continuité de F_X , où F_{X_n} et F_X sont respectivement les fonctions de répartition de X_n et X .

Comment déterminer F_X . Pour trouver F_X , on calcule la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}$, lorsqu'elle existe (si on a la convergence en loi, alors la limite doit exister en tout point x sauf sur un ensemble dénombrable).

La fonction de répartition (limite) F_X sera égale à la régularisée à droite de la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}$ déjà calculée. Il est facile de vérifier que la fonction de répartition ainsi obtenue vérifie (par construction) la définition de la convergence en distribution donnée ci-dessus.

Exemples. 1. Reprenons l'exemple de l'exercice 1 du TD1. On a trouvé que la loi de $Y_n = X_n - [X_n]$ était donnée par

$$F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ \frac{1 - \exp(-y/n)}{1 - \exp(-1/n)} & \text{si } 0 \leq y < 1 \\ 1 & \text{si } y \geq 1. \end{cases}$$

Donc

$$\lim_{y \rightarrow \infty} F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ y & \text{si } 0 \leq y < 1 \\ 1 & \text{si } y \geq 1. \end{cases}$$

La limite obtenue étant déjà continue en tout point $y \in \mathbb{R}$ (donc aussi continue à droite), la fonction de répartition limite coïncide avec $\lim_{y \rightarrow \infty} F_{Y_n}$. Ici, on reconnaît que cette fonction de répartition limite est celle d'une v.a. $X \sim \mathcal{U}[0, 1]$.

2. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ la suite de v.a. tel que $X_n = 1/n$ (v.a. dégénérée). On a que

$$F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1/n \\ 1 & \text{si } x \geq 1/n . \end{cases}$$

Pour calculer d'abord la limite de F_{X_n} , notons d'abord que si $x > 0$, alors pour tout $n \geq 1/[x]$

$$F_{X_n}(x) = 1$$

d'où $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) = 1 \forall x > 0$. Maintenant si $x \leq 0$, on a que $F_{X_n}(x) = 0$ et donc $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) = 0$. Il s'en suit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 . \end{cases}$$

La limite obtenue est continue à gauche. Sa régularisée à droite est donnée par

$$\begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

qui est aussi la fonction de répartition limite qu'on cherche. On reconnaît que cette fonction de répartition limite est l'indicatrice $1_{[0, \infty[}$ et donc celle de la v.a. $X = 0$.

3. Considérons la suite de v.a. $(X_n)_{n \geq 1}$ tel que la fonction de répartition de F_{X_n} est donnée par

$$F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1/3 & \text{si } 0 \leq x < 1/2 - 1/(2n) \\ 3/4 & \text{si } 1/2 - 1/(2n) \leq x < 1/2 + 1/(2n) \\ 1 & \text{si } x \geq 1/2 + 1/(2n). \end{cases}$$

Il n'est pas difficile de montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1/3 & \text{si } 0 \leq x < 1/2 \\ 3/4 & \text{si } x = 1/2 \\ 1 & \text{si } x > 1/2. \end{cases}$$

Notons que la limite est discontinue au point $x = 1/2$. Sa régularisée à droite est donnée par

$$\begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1/3 & \text{si } 0 \leq x < 1/2 \\ 1 & \text{si } x \geq 1/2. \end{cases}$$

égale à la fonction de répartition limite, F_X , qu'on cherche. Dans cet exemple X est la v.a. discrète prenant les valeurs 0 et $1/2$ avec les probabilités $1/3$ et $2/3$.