

Solution de l'exercice 111

Considérons la fonction f définie par

$$f(x, y) = e^{x^4 + y^4 - 2xy}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

1. Notons que f s'écrit

$$f(x, y) = e^{\phi(x, y)}$$

où $\phi(x, y) = x^4 + y^4 - 2xy$. Calculons les dérivées partielles de f :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y)e^{\phi(x, y)} = (4x^3 - 2y)e^{x^4 + y^4 - 2xy} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y)e^{\phi(x, y)} = (4y^3 - 2x)e^{x^4 + y^4 - 2xy} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= (12x^2 + (4x^3 - 2y)^2)e^{x^4 + y^4 - 2xy} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= (12y^2 + (4y^3 - 2x)^2)e^{x^4 + y^4 - 2xy} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= (-2 + (4x^3 - 2y)(4y^3 - 2x))e^{x^4 + y^4 - 2xy}. \end{aligned}$$

2. La matrice hessienne au point $(0, 0)$ est donnée par

$$D^2 f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que pour le point $(0, 0)$, on a $rt - s^2 = 0 - 4 = -4 < 0$ et donc la fonction f n'est ni convexe ni concave (cf. cours).

3. Le développement limité à l'ordre 2 de f au voisinage du point $(0, 1)$ est donné par

$$f(0 + h_1, 1 + h_2) = f(0, 1) + df_{(0,1)}(h_1, h_2) + \frac{1}{2}d^2 f_{(0,1)}(h_1, h_2) + (h_1^2 + h_2^2)\epsilon(h_1, h_2)$$

où ϵ est une fonction continue sur une boule ouverte de centre $O = (0, 0)$ telle que $\epsilon(0, 0) = 0$,

$$\begin{aligned} df_{(0,1)}(h_1, h_2) &= h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(0, 1) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(0, 1) \\ &= -2eh_1 + 4eh_2, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} d^2 f_{(0,1)}(h_1, h_2) &= h_1^2 r + h_2^2 t + 2sh_1 h_2 \\ &= 4eh_1^2 + 28eh_2^2 - 20eh_1 h_2, \end{aligned}$$

d'où

$$f(h_1, 1 + h_2) = e + e(-2h_1 + 4h_2) + e(2h_1^2 + 14h_2^2 - 10h_1 h_2) + (h_1^2 + h_2^2)\epsilon(h_1, h_2).$$

4. L'équation de π_0 le plan tangent de f au point $(0, 1)$ est donnée par

$$\pi_0 : z = f(0, 1) + (x - 0) \frac{\partial f}{\partial x}(0, 1) + (y - 1) \frac{\partial f}{\partial y}(0, 1)$$

c'est-à-dire

$$\pi_0 : z = e - 2ex + 4e(y - 1).$$

On a

$$rt - s^2 = 4e \times 28e - 10^2 e^2 = (112 - 100)e^2 > 0$$

et $r = 4 > 0$. Donc le graphe de f reste au-dessus du plan π_0 au voisinage de $(0, 1)$.

5. Par définition, on a

$$e_{f/x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \frac{x}{f(x, y)} = x(4x^3 - 2y)$$

et

$$e_{f/y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \frac{y}{f(x, y)} = y(4y^3 - 2x).$$

6. Soit

$$\frac{\Delta f}{f(1, 2)}$$

l'accroissement relatif de f lorsque (x, y) passe de $(1, 2)$ à $(1 + \Delta x, 2 + \Delta y)$. On sait d'après le cours que

$$\frac{\Delta f}{f(1, 2)} \approx e_{f/x}(1, 2) \frac{\Delta x}{1} + e_{f/y}(1, 2) \frac{\Delta y}{2} = 0 \times 3\% + 60 \times 1\% = 0.6.$$