

Solution de l'exercice 63

Seuls les développements limités sont à corriger ! Les conclusions que nous avons tirées à propos de la position du plan tangent restent correctes. Ici, seule la question a) sera traitée.

On considère la fonction

$$f(x, y) = x^2y + 3xy + y^4, (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

et $M_0 = (1, 2)$.

La fonction f est un polynôme, donc de classe C^2 sur $D_f = \mathbb{R}^2$. Le développement limité à l'ordre 2 de f au voisinage de M_0 est donné par

$$f(1 + h_1, 2 + h_2) = f(1, 2) + df_{M_0}(h_1, h_2) + \frac{1}{2}d^2f_{M_0}(h_1, h_2) + (h_1^2 + h_2^2)\epsilon(h_1, h_2)$$

où ϵ est une fonction continue sur une boule de centre $O = (0, 0)$ telle que $\epsilon(0, 0) = 0$,

$$df_{M_0}(h_1, h_2) = df_{(1,2)}(h_1, h_2) = h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2)$$

et

$$d^2f_{M_0}(h_1, h_2) = d^2f_{(1,2)}(h_1, h_2) = h_1^2r + h_2^2t + 2h_1h_2s$$

où

$$\begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 2) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 2) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 2) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, 2) \end{pmatrix}.$$

On calcule les dérivées partielles de f :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 2xy + 3y \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= x^2 + 3x + 4y^3 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= 2y \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= 12y^2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= 2x + 3.\end{aligned}$$

Donc

$$r = 2y, t = 12y^2, s = 2x + 3.$$

En remplaçant (x, y) par $(1, 2)$, on obtient

$$\begin{aligned}f(1 + h_1, 2 + h_2) &= 24 + 10h_1 + 36h_2 + \frac{1}{2}(4h_1^2 + 48h_2^2 + 10h_1h_2) + (h_1^2 + h_2^2)\epsilon(h_1, h_2) \\ &= 24 + 10h_1 + 36h_2 + 2h_1^2 + 24h_2^2 + 5h_1h_2 + (h_1^2 + h_2^2)\epsilon(h_1, h_2).\end{aligned}$$

Notons que le développement limité peut aussi être donné par

$$\begin{aligned}f(x, y) &= 24 + 10(x - 1) + 36(y - 2) \\ &\quad + 2(x - 1)^2 + 24(y - 2)^2 + 5(x - 1)(y - 2) + ((x - 1)^2 + (y - 2)^2)\epsilon(x - 1, y - 2).\end{aligned}$$

L'équation du plan tangent π_0 de f au point M_0 est donnée par

$$\pi_0 : z = f(1, 2) + (x - 1)\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) + (y - 2)\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2)$$

c'est-à-dire

$$\pi_0 : z = 24 + 10(x - 1) + 36(y - 2).$$

On a

$$rt - s^2 = 4 \times 48 - 5^2 > 0$$

et $r = 4 > 0$. On en déduit que le graphe de f est situé au-dessus de π_0 au voisinage de $M_0 = (1, 2)$.