F. Balabdaoui-Mohr
Université Paris Dauphine
Année 2009-2010
DUGEAD - Première année
Analyse réelle

Solution de l'exercice 67

On considère la fonction

$$f(x,y) = \frac{\exp(5x^2 - xy + y^2)}{x^2 y}.$$

1. On a

$$\mathcal{D}_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0 \text{ et } y \neq 0\right\}.$$

L'ensemble $\mathcal{D}_f$ n'est pas convexe car les points $A = (1,1)$ et $B = (1,-1)$ appartiennent à $\mathcal{D}_f$ alors que leur milieu $I = (1,0)$ n'y appartient pas.

2. On veut montrer que f est convexe sur

$$\mathcal{C} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ et } y > 0\right\}.$$

Notons d'abord que $\mathcal{C}$ est convexe car $\mathcal{C}$ est l'intersection des demi-plans $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\right\}$ et $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\right\}$.

En passant au logarithme, on définit sur $\mathcal{C}$ la fonction

$$g(x,y) = \ln(f(x,y)) = 5x^2 - xy + y^2 - 2\ln(x) - \ln(y) = g_1(x,y) + g_2(x,y)$$

où

$$g_1(x,y) = 5x^2 - xy + y^2, \quad \text{et} \quad g_2(x,y) = -2\ln(x) - \ln(y).$$

La fonction g_1 est un polynôme donc de classe C^2 sur $\mathcal{C}$. Calculons ses dérivées partielles :

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y) &= 10x - y \\ \frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y) &= -x + 2y \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g_1}{\partial x^2}(x,y) &= 10 \\
\frac{\partial^2 g_1}{\partial y^2}(x,y) &= 2 \\
\frac{\partial^2 g_1}{\partial x \partial y}(x,y) &= -1.
\end{aligned}$$

Donc pour tout $(x,y) \in \mathcal{C}$

$$r = 10, t = 2, s = -1.$$

Donc $rt - s^2 = 20 - 1 > 0$ et $r > 0$ pour tout $(x,y) \in \mathcal{C}$. On en déduit que g_1 est convexe sur $\mathcal{C}$ (cf. cours).
D'autre part, les fonctions d'une seule variable $x \mapsto -2\ln(x)$ et $y \mapsto -\ln(y)$ sont convexes sur $]0,+\infty[$. Par le lemme d'extension et la stabilité de la convexité par la somme, on en déduit que g_2 est convexe sur $\mathcal{C}$. D'où, g est convexe sur $\mathcal{C}$.
On a montré que $\ln(f)$ est convexe. On en déduit que f est aussi convexe sur $\mathcal{C}$ (cf. cours/Corollaire 21.3.12).

3. On considère maintenant la fonction

$$g(x,y) = f(x,y) + ((x+y)^2 + 1)^3.$$

On va démontrer que g est convexe sur $\mathcal{C}$. Notons

$$h(x,y) = ((x+y)^2 + 1)^3.$$

On a

$$h(x,y) = \psi(x+y)$$

avec

$$\psi(z) = (z^2 + 1)^3.$$

La fonction ψ est de class C^1 sur $]0,+\infty[$ avec

$$\psi'(z) = 6z(z^2+1)^2, \quad \text{et} \quad \psi''(z) = 6((z^2+1)^2 + 4z^2(z^2+1)) \geq 0.$$

La fonction ψ est donc convexe sur $]0,+\infty[$. Comme $(x,y) \mapsto x+y$ est affine, on en déduit que $(x,y) \mapsto \psi(x+y)$ est convexe sur

$$\{(x,y) \in \mathcal{C} : x+y \in]0,+\infty[\} = \mathcal{C}$$

(cf. cours).
La somme de deux fonctions convexes étant aussi convexe, on en déduit par la question 2 que g est convexe sur $\mathcal{C}$.