F. Balabdaoui-Mohr
Université Paris Dauphine
DUGEAD - Première année
Analyse réelle

Année 2009-2010

Solution de l'exercice 68

Considérons la fonction f définie par

$$f(x,y) = x^\alpha y^\beta$$

sur $\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$.

Notons d'abord que f est de classe C^2 sur $\mathcal{C}$. Cela découle du lemme d'extension et du fait que $x \mapsto x^\alpha$ et $y \mapsto y^\beta$ sont des fonctions d'une seule variable de classe C^2 sur $]0, +\infty[$.

Calculons les dérivées partielles de f. On a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \alpha x^{\alpha-1} y^\beta \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \beta x^\alpha y^{\beta-1}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= \alpha(\alpha-1) x^{\alpha-2} y^\beta \\
t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= \beta(\beta-1) x^\alpha y^{\beta-2} \\
s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= \alpha\beta x^{\alpha-1} y^{\beta-1}.
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
rt - s^2 &= \left(\alpha\beta(\alpha-1)(\beta-1) - \alpha^2\beta^2\right) x^{2\alpha-2} y^{2\beta-2} \\
&= \alpha\beta\left((\alpha-1)(\beta-1) - \alpha\beta\right) x^{2\alpha-2} y^{2\beta-2} \\
&= \alpha\beta\left(-\alpha-\beta+1\right) x^{2\alpha-2} y^{2\beta-2}.
\end{aligned}$$

Le déterminant $rt - s^2 \geq 0$ si et seulement si

$$\alpha\beta\left(-\alpha-\beta+1\right) \geq 0.$$

On en déduit que (cf. cours/ Théorème 21.2.1)

- Si $\alpha\beta\,(-\alpha-\beta+1) \geq 0$ et $\alpha(\alpha-1) > 0$ ou $\beta(\beta-1) > 0$, alors f est convexe sur $\mathcal{C}$.
- Si $\alpha\beta\,(-\alpha-\beta+1) \geq 0$ et $\alpha(\alpha-1) < 0$ ou $\beta(\beta-1) < 0$, alors f est concave sur $\mathcal{C}$.
- Si $\alpha\beta\,(-\alpha-\beta+1) < 0$, alors f n'est ni convexe ni concave sur $\mathcal{C}$ (notons que dans ce cas-là, on a $rt - s^2 < 0$ pour tout $(x, y) \in \mathcal{C}$, alors que le théorème nous dit qu'il suffit de trouver un (x, y) pour lequel l'inégalité est satisfaite).

Notons que dans le cas $\alpha\beta\,(-\alpha-\beta+1) \geq 0$ et $\alpha(\alpha-1) = 0$ (le cas $\beta(\beta-1) = 0$ est similaire), on a

$$\alpha = 0 \quad \text{ou} \quad \alpha = 1$$

Si $\alpha = 0$, alors $f(x, y) = y^\beta$. La fonction d'une seule variable $y \mapsto y^\beta$ définie sur $]0, +\infty[$ est convexe si $\beta(\beta-1) \geq 0$ et concave si $\beta(\beta-1) < 0$. Par le lemme d'extension, on en déduit que f est convexe si $\beta(\beta-1) \geq 0$ et concave si $\beta(\beta-1) < 0$.
Si $\alpha = 1$. La condition

$$\alpha\beta\,(-\alpha-\beta+1) \geq 0$$

devient

$$-\beta^2 \geq 0$$

ce qui n'est possible que si $\beta = 0$. Dans ce cas-là, $f(x, y) = x$ qui est à la fois convexe et concave car affine.