F. Balabdaoui-Mohr
Université Paris Dauphine
Année 2009-2010
DUGEAD - Première année
Analyse réelle

Solution de l'exercice 69

(i) On considère la fonction

$$f(x,y) = x^{1/2} + 3\ln(y) - 2\exp(x+y).$$

sur $\mathcal{U} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$. Notons que $\mathcal{U}$ est convexe car l'intersection de deux demi-plans.

La fonction f s'écrit

$$f(x,y) = f_1(x,y) + f_2(x,y) + f_3(x,y)$$

où $f_1(x,y) = x^{1/2}$, $f_2(x,y) = 3\ln(x)$ et $f_3(x,y) = -2\exp(x+y)$.

La fonction d'une seule variable $x \mapsto x^{1/2}$ est concave sur $]0,+\infty[$ car elle est de classe C^2 sur cet intervalle et sa dérivée seconde est $-1/4x^{-3/2} < 0$. Par le lemme d'extension, on en déduit que f_1 est concave sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ et en particulier sur $\mathcal{U}$.

De la même manière , on démontre que f_2 est concave sur $\mathcal{U}$.
Notons que

$$f_3(x,y) = \psi(x+y)$$

avec $(x,y) \mapsto x+y$ est affine et $\psi(z) = -\exp(z)$. Comme ψ est concave sur $\mathbb{R}$, on en déduit que f_3 est concave sur $\mathcal{U}$ (cf. cours).

On en déduit que f est concave sur $\mathcal{U}$. Notons que $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y > 0\}$ et donc $\mathcal{U}$ est strictement inclus dans $\mathcal{D}_f$.

(ii) On considère la fonction

$$g(x,y) = x^2 + y^4$$

sur $\mathbb{R}^2$.
Les fonctions

$$x \mapsto x^2$$

et

$$y \mapsto y^4$$

sont convexes sur $\mathbb{R}$ car elles sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et leurs dérivées secondes ($x \mapsto 2$ et $y \mapsto 12y^2$ sont positives). On en déduit par le lemme d'extension et la stabilité de la convexité par la somme que g est convexe sur $\mathbb{R}^2$.

(iii) On considère la fonction

$$g(x, y) = \sqrt{2x + 3y}$$

sur

$$\nu = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 3y > 0\}.$$

Notons que ν est convexe (un demi-plan) et qu'il est strictement inclu dans $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 3y \geq 0\}$.

On a

$$h(x, y) = \phi(2x + 3y)$$

avec $\phi(z) = \sqrt{z}$. La fonction $(x, y) \mapsto 2x + 3y$ est affine et ψ est concave sur $]0, +\infty[$. On en déduit que h est concave sur

$$\{(x, y) \in \nu : 2x + 3y \geq 0\} = \nu.$$