

# Les Questions les Plus Fréquemment Posées en Statistiques Mathématiques

par Fadoua Balabdaoui-Mohr

Dans tout ce qui suit, les v.a. considérées sont réelles. Cependant, la généralisation à des v.a. dans  $\mathbb{R}^n, n > 1$ , se fait facilement.

**Q1.** Si  $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$  et  $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} c$  où  $c$  est une constante, est-ce qu'on peut dire que  $(X_n, Y_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} (X, c)$ ?

**R. Oui.**

Pour les plus curieux, en voici une preuve. D'abord, rappelons ici deux définitions équivalentes de la convergence en distribution d'une suite de v.a.  $(Z_n)_n$  vers une v.a.  $Z$ :

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} E[g(Z_n)] = E[g(Z)], \forall g$  une fonction continue et bornée
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} E[g(Z_n)] = E[g(Z)], \forall g$  une fonction continue à support compact.

(Ces définitions sont tout à fait équivalentes à la définition usuelle avec les fonctions de répartition ou les fonctions caractéristiques).

Ensuite, on utilisera le résultat suivant: Si  $Z_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Z$  et  $W_n - Z_n \xrightarrow{P} 0$ , alors  $W_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Z$ . En effet, soit  $g$  une fonction continue à support compact. Il nous suffit de montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[g(W_n)] = E[g(Z)].$$

Soit  $\epsilon > 0$ . Par l'uniforme continuité de  $g$  (résultat d'Analyse), on peut trouver un  $\delta > 0$  tel que

$$|x - y| < \delta \implies |g(x) - g(y)| < \epsilon.$$

Notons aussi que  $g$  est aussi bornée (fonction continue sur un compact), et donc il existe  $M > 0$  tel que  $|g(x)| < M$ .

On a que

$$\begin{aligned} \left| E[g(W_n)] - E[g(Z)] \right| &\leq \left| E[g(W_n)] - E[g(Z_n)] \right| + \left| E[g(Z_n)] - E[g(Z)] \right| \\ &\leq \left| E[g(W_n)] - E[g(Z_n)] \right| + \left| E[g(Z_n)] - E[g(Z)] \right| \\ &\leq E \left[ \left| g(W_n) - g(Z_n) \right| 1_{|X_n - Y_n| \leq \delta} \right] + E \left[ \left| g(W_n) - g(Z_n) \right| 1_{|X_n - Y_n| > \delta} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left| E[g(Z_n)] - E[g(Z)] \right| \\
\leq & \epsilon + E \left[ \left| g(W_n) - g(Z_n) \right| 1_{|X_n - Y_n| > \delta} \right] + \left| E[g(Z_n)] - E[g(Z)] \right| \\
\leq & \epsilon + 2MP(|X_n - Y_n| > \delta) + \left| E[g(Z_n)] - E[g(Z)] \right|
\end{aligned}$$

Mais  $X_n - Y_n \xrightarrow{P} 0$  implique qu'il existe  $N_1$  tel que pour tout  $n \geq N_1$ ,  $P(|X_n - Y_n| > \delta) < \epsilon/(2M)$ . Finalement, Le troisième terme converge vers 0 par l'hypothèse  $Z_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Z$  et donc il existe  $N_2$  tel que pour tout  $n \geq N_2$ ,  $|E[g(Z_n)] - E[g(Z)]| \leq \epsilon$ .

Il s'en suit que

$$|E[g(W_n)] - E[g(Z)]| \leq 3\epsilon, \quad \text{pour tout } n \geq \max(N_1, N_2),$$

d'où  $\lim_{n \rightarrow \infty} E[g(W_n)] = E[g(Z)]$  et  $W_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Z$ .

Maintenant pour démontrer que  $(X_n, Y_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} (X, c)$ , il suffit de montrer, en vue du résultat précédent, que  $(X_n, Y_n) - (X_n, c) \xrightarrow{P} 0$  et que  $(X_n, c) \xrightarrow{\mathcal{L}} (X, c)$ .

Ici, comme toutes les normes sont équivalentes dans  $\mathbb{R}^2$ , il suffit pour montrer la première assertion qu'on a que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X_n| + |Y_n - c| > \epsilon) = 0, \quad \forall \epsilon > 0$$

Mais ceci est vrai puisque  $|X_n - X_n| + |Y_n - c| > \epsilon = |Y_n - c| > \epsilon$  et  $Y_n \xrightarrow{P} c$ .

Maintenant, soit  $g$  une fonction continue bornée. Il est clair qu'on a aussi que  $x \mapsto g(x, c)$  est continue bornée et donc par la convergence en distribution de  $X_n$  vers  $X$ , on a que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[g(X_n, c)] = E[g(X, c)].$$

Mais cela implique également que  $(X_n, c) \xrightarrow{\mathcal{L}} (X, c)$ . On en déduit que  $(X_n, Y_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} (X, c)$ .  $\square$

**Q2.** On a  $X_n \xrightarrow{L_1} X$ . Soit  $g$  une fonction continue. Est-ce qu'on peut dire en général que  $g(X_n) \xrightarrow{L_1} g(X)$  ?

**R. Non.**

Voici un contreexemple. Considérons  $X_n$  la v.a. discrète prenant les valeurs 0 et  $\sqrt{n}$  avec les probabilités  $1 - 1/n$  et  $1/n$ . On a bien que

$$E[|X_n - 0|] = E[X_n] = \sqrt{n}/n \rightarrow 0$$

mais en prenant  $g(x) = x^2$ , on a que

$$E[X_n^2] = n/n = 1$$

et donc  $X_n^2$  ne converge pas en  $L_1$  à  $X^2 = 0$ .

**Q3.** Si  $X_n \xrightarrow{P} X$  et  $Y_n \xrightarrow{P} Y$ , est-ce qu'on peut dire que  $(X_n, Y_n) \xrightarrow{P} (X, Y)$  ?

**R. Oui.**

En effet, comme toutes les normes sont équivalentes dans  $\mathbb{R}^2$ , on considère la norme  $\|(x, y)\|_1 = |x| + |y|$ . Il suffit de montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\|(X_n, Y_n) - (X, Y)\|_1 > \epsilon) = 0$$

pour tout  $\epsilon > 0$ . On a que

$$\begin{aligned} P(|X_n - X| + |Y_n - Y| > \epsilon) &\leq P(|X_n - X| > \epsilon/2 \text{ ou } |Y_n - Y| > \epsilon/2) \\ &\leq P(|X_n - X| > \epsilon/2) + P(|Y_n - Y| > \epsilon/2) \\ &\rightarrow 0 + 0 = 0, \text{ quand } n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad \square$$

**Q4.** Si  $X_n \xrightarrow{p.s.} X$  et  $Y_n \xrightarrow{p.s.} Y$ , est-ce qu'on peut dire que  $(X_n, Y_n) \xrightarrow{p.s.} (X, Y)$  ?

**R. Oui.**

Soit

$$E = \{ \lim_{n \rightarrow \infty} (X_n, Y_n) = (X, Y) \} = \{ \lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} Y_n = Y \}.$$

On a que

$$\begin{aligned} P(E) = 1 - P(E^c) &= 1 - P(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n \neq X \text{ ou } \lim_{n \rightarrow \infty} Y_n \neq Y) \\ &\geq 1 - (P(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n \neq X) + P(\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n \neq Y)). \end{aligned}$$

Mais par définition de la convergence p.s. on a que

$$P(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n \neq X) = P(\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n \neq Y) = 0$$

d'où

$$P(E) \geq 1 \implies P(E) = 1. \quad \square$$

**Q5.** Le Théorème de Slutsky dit que si  $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$  et  $A_n \xrightarrow{P} a$  et  $B_n \xrightarrow{P} b$ , où  $a$  et  $b$  sont des constantes, alors  $A_n X_n + B_n \xrightarrow{\mathcal{L}} aX + b$ . Est-ce que le théorème reste vrai si  $a$  ou  $b$  ne sont pas forcément des constantes?

**R. Non.**

Voici un contreexemple. Considérons  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$  et  $X_n$  et  $A_n$  les v.a telles que

$$X_n = \begin{cases} Z & \text{si } n \text{ est pair} \\ -Z & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

et  $A_n = Z$  pour tout  $n$ . On a que  $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \sim \mathcal{N}(0, 1)$  ( $F_{X_n}(x) = \Phi(x)$  si  $n$  est pair et  $F_{X_n}(x) = 1 - \Phi(-x) = \Phi(x)$  si  $n$  est impair),  $A_n \xrightarrow{P} Z$  (on a même  $A_n \xrightarrow{p.s.}$  puisque  $A_n = Z$ !) mais  $A_n X_n$  ne converge pas en loi! (puisque  $A_n X_n = Z^2 \sim \chi_1^2$  pour  $n$  pair et  $A_n X_n = -Z^2 \sim -\chi_1^2$  si  $n$  est impair).