

## Solution du CC $n^{\circ}2$

1. Soit  $\epsilon > 0$ . On va montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|Y_n| > \epsilon) = 0.$$

Remarquons que  $P(X_n \geq 1/n) = 1$ . Cela implique que  $P(Y_n \geq 0) = 1$ .  
Donc,

$$\begin{aligned} P(|Y_n| > \epsilon) &= P(Y_n > \epsilon) \\ &= P\left(X_n > \epsilon + \frac{1}{n}\right) \\ &= \int_{\epsilon + \frac{1}{n}}^{\infty} \frac{dx}{nx^2} \\ &= \left[-\frac{n}{x}\right]_{\epsilon + 1/n}^{\infty} \\ &= \frac{1}{n(\epsilon + 1/n)} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

On déduit que la suite  $(Y_n)_n$  converge en probabilité vers 0.

**Remarque.** On aurait pu aussi démontrer d'abord que la suite  $(X_n)_n$  converge elle-même en probabilité vers 0 et en déduire par le Théorème de Slutsky que  $(Y_n)_n$  converge vers 0 en probabilité. En effet, soit  $\epsilon > 0$ . Pour  $n$  assez grand  $\epsilon > 1/n$ . Il vient que

$$\begin{aligned} P(|X_n| > \epsilon) &= P(X_n > \epsilon) \\ &= \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{dx}{nx^2} \\ &= \frac{1}{n\epsilon} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Cela implique aussi que  $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} 0$  (en fait il y a même équivalence). En posant  $A_n = 1$  et  $B_n = -1/n$ , on a que  $Y_n = A_n X_n + B_n$ . Par le Théorème de Slutsky,  $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} 0$ , ce qui implique que  $Y_n \xrightarrow{P} 0$ .

2. Remarquons d'abord que la densité s'écrit aussi (c'est là l'astuce !)

$$\begin{aligned} f_X(x, \theta) &= (1 - \theta)^{1_{x \in [-1/2, 0]}} (1 - \theta)^{1_{x \in ]0, 1/2]} 1_{x \in [-1/2, 1/2]} \\ &= (1 - \theta)^{1 - 1_{x \in ]0, 1/2]} (1 - \theta)^{1_{x \in ]0, 1/2]} 1_{x \in [-1/2, 1/2]}. \end{aligned}$$

La vraisemblance est donnée par

$$\begin{aligned} L_n(\theta) &= \prod_{j=1}^n (1 - \theta)^{1 - 1_{x_j \in ]0, 1/2]} (1 - \theta)^{1_{x_j \in ]0, 1/2]} 1_{x_j \in [-1/2, 1/2]} \\ &= (1 - \theta)^{n - \sum_{j=1}^n 1_{x_j \in ]0, 1/2]} (1 - \theta)^{\sum_{j=1}^n 1_{x_j \in ]0, 1/2]} \prod_{j=1}^n 1_{x_j \in [-1/2, 1/2]} \\ &= (1 - \theta)^{n - n_0} (1 + \theta)^{n_0} \prod_{j=1}^n 1_{x_j \in [-1/2, 1/2]}, \text{ en posant } n_0 = \sum_{j=1}^n 1_{x_j \in ]0, 1/2]} \end{aligned}$$

En passant au logarithme, la log-vraisemblance s'écrit

$$l_n(\theta) = (n - n_0) \log(1 - \theta) + n_0 \log(1 + \theta) + \log \left( \prod_{j=1}^n 1_{x_j \in [-1/2, 1/2]} \right)$$

où  $\log \left( \prod_{j=1}^n 1_{x_j \in [-1/2, 1/2]} \right)$  est la réalisation de  $\log \left( \prod_{j=1}^n 1_{X_j \in [-1/2, 1/2]} \right)$  prenant la valeur 0 avec une probabilité égale 1 (donc presque sûrement).

$$\begin{aligned} \frac{\partial l_n(\theta)}{\partial \theta} &= -\frac{n - n_0}{1 - \theta} + \frac{n_0}{1 + \theta} \\ &= 0 \iff \theta = \hat{\theta} = \frac{2n_0 - n}{n}. \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 l_n(\theta)}{\partial \theta^2} = -\frac{n - n_0}{(1 - \theta)^2} - \frac{n_0}{(1 + \theta)^2} < 0.$$

On en déduit que (en passant à la représentation aléatoire)

$$\hat{\theta}_n = \frac{2N_0 - n}{n}$$

est l'EMV de  $\theta$  où  $N_0 = \sum_{j=1}^n 1_{X_j \in ]0, 1/2]}$ .

**Remarque.** Si on pose  $Y_j = 1_{X_j \in ]0, 1/2]}$ , alors

$$\hat{\theta}_n = 2\bar{Y}_n - 1.$$

3. Soient  $X_1, \dots, X_n$  des v.a. i.i.d  $\sim Geo(p), p \in ]0, 1[$ . La vraisemblance s'écrit

$$\begin{aligned} L_n(p) &= \prod_{j=1}^n P(X = x_j), \text{ car il s'agit d'un modèle discret} \\ &= \prod_{j=1}^n (1-p)^{x_j-1} p \\ &= (1-p)^{\sum_{j=1}^n x_j - n} p^n \\ &= h(x_1, \dots, x_n) g(T(x_1, \dots, x_n), p) \end{aligned}$$

où  $h(x_1, \dots, x_n) = 1$ ,  $T(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n x_j$  et  $g(t, p) = (1-p)^{t-n} p^n$ . Par le Théorème de Factorisation, on en déduit que  $T(X_1, \dots, X_n) = \sum_{j=1}^n X_j$  est exhaustive pour  $p$ .

4. Posons

$$S = \frac{1}{2}(X^2 + Y^2).$$

On a que

$$S = \left(\frac{X}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{Y}{\sqrt{2}}\right)^2 \sim \chi_2^2$$

d'où

$$E[S^2] = Var(S) + E(S)^2 = 2 \times 2 + 2^2 = 8$$

et

$$E[(X^2 + Y^2)^2] = 2^2 E[S^2] = 32.$$