Université Paris-Dauphine
Département MIDO
L3 - Statistique Mathématique

Année 2008-2009

Feuille de Travaux Dirigés 5

Intervalles de confiance et tests d'hypothèses

Exercice 1. Le nombre d'interruptions du trafic de plus d'une minute, dans une journée, sur la ligne C du RER, est supposé suivre une loi de Poisson de paramètre λ inconnu. On se propose de founir une estimation ensembliste de λ à partir du relevé de ces interruptions sur 200 journées. La moyenne empirique de cet échantillon est égale à 3. Donner un intervalle de confiance bilatéral symétrique de niveau asymptotiquement égal à 0.95 pour λ.

Exercice 2. On considère un n-échantillon $X_1, \ldots, X_n$ de loi exponentielle d'espérance $\theta > 0$.

1. Donner une statistique pivotale fondée sur la statistique exhaustive $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$.
2. Construire une intervalle de confiance de niveau $1 - \alpha$ pour θ.

Exercice 3. Un sondage sur la popularité du premier ministre indique que 51% des personnes interrogées sont favorables à sa politique. Donner un intervalle de confiance bilatéral symétrique de niveau asymptotiquement égal 0.95 pour la proportion p de personnes favorables au premier ministre. Le sondage a été réalisé auprès de $n = 100$ personnes. Même question si $n = 1000$.

Exercice 4 Les aéroports doivent respecter certaines normes concernant les bruits émis par les avions au décollage et à l'atterrissage. La limite tolérée pour les zones habitées proches d'un aéroport se situe à environ 80 décibels (dbs). Les habitants d'un village voisin d'un aéroport assurent que le bruit atteint la valeur limite de 80 dbs tandis que l'aéroport affirme qu'il n'est que de 78 dbs. On admet que l'intensité du bruit provoqué par le passage d'un avion suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu, 49)$. On enregistre l'intensité du bruit sur un échantillon de 100 avions. On constate un bruit moyen de 79.1 dbs.

1. Pour un risque de première espèce égal à 5%, tester l'hypothèse $H_0 : \mu = 80$ contre $H_1 : \mu = 78$. Calculer le risque de deuxième espèce.
2. Pour un risque de première espèce égal à 5%, tester maintenant $H_0 : \mu_0 = 78$ contre $H_1 : \mu = 80$. Calculer le risque de deuxième espèce.
3. Comparer les règles de décision correspondant à ces deux tests.

Exercice 5 Le poids de paquets de poudre de lessive, à l'issue de l'empaquetage, est supposé suivre une variable aléatoire X de loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ dont l'écart-type, égal à 5, représente la variabilité du poids due à l'imprécision de la machine. Le poids marqué sur les paquets est 710 gr. Toutes les heures, 10 paquets sont prélevés au hasard et pesés. On obtient, pour une heure donnée, $\bar{x}_{10} = 707$ gr.

1. Pour un niveau égal à 5%, tester l'hypothèse H_0 selon laquelle le poids d'un paquet est en moyenne supérieur à la spécification. L'hypothèse alternative H_1 est que le poids d'un paquet est en moyenne inférieur à celui annoncé sur les paquets.
2. Déterminer un intervalle de confiance bilatéral symétrique de niveau 90% pour le poids moyen des paquets de lessive.

Exercice 6 Pour construire un pont, une entreprise reçoit un lot de poutrelles métalliques dont le fabricant indique qu'elles peuvent résister jusqu'à une charge de 100 tonnes. Avant d'accepter le lot, l'entreprise prélève un échantillon de 16 poutrelles dont elle mesure la charge de rupture. On obtient les résultats suivants : 104, 104, 103, 93, 102, 101, 92, 98, 96,100, 98, 94, 101, 100, 95, 93. On admet que la charge de rupture suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

1. Pour un risque de première espèce égal à 5%, tester l'hypothèse $H_0 : \mu = 100$ contre l'hypothèse alternative $H_1 : \mu < 100$.
2. Déterminer un intervalle de confiance unilatéral à gauche de niveau de confiance 95% pour le paramètre μ. Comparer avec le résultat du test.

Exercice 7 On souhaite établir un contrôle de qualité à la réception d'un grand nombre de pièces de série. On désigne par p la proportion de pièces défectueuses dans la livraison et on envisage deux hypothèses extrêmes : $H_0 : p = 5\%$ et $H_1 : p = 8\%$. Si H_0 n'est pas rejetée, l'acheteur accepte le lot, sinon il le refuse. On décide d'examiner 400 pièces et de fixer une valeur critique égale à 6% telle que si la proportion de pièces défectueuses est supérieure à 6%, on refuse le lot. Calculer asymptotiquement les risques de première et deuxième espèce correspondant à cette décision.

Exercice 8 Sur un échantillon de 100 nouveaux postes de télévision ayant fonctionné le même nombre d'heures pendant une année, on a établi le tableau suivant donnant les nombres n_k de postes ayant nécessité k réparations :

Nombre de réparations	0	1	2	3	4 et plus
Nombre de postes	61	30	7	2	0

1. Calculer moyenne et variance empiriques du nombre de réparations. Que constatez-vous ? Quelle loi proposez-vous pour la variable aléatoire égale au nombre annuel de réparations sur un poste de télévision ?
2. Tester l'adéquation de la distribution observée à la loi théorique proposée.

Exercice 9 On considère une variable aléatoire X de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et un n-échantillon $X_1, \dots, X_n$ de X. On souhaite tester $H_0 : \lambda = \lambda_0$ contre $H_1 : \lambda = \lambda_1$ où $\lambda_0 < \lambda_1$.

1. Déterminer la région critique du test de rapport de vraisemblance de niveau α.
2. Application numérique : $n = 100$, $\lambda_0 = 0.2$, $\lambda_1 = 0.5$ et $\alpha = 0.05$.

Exercice 10 On considère une variable aléatoire X de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ et un n-échantillon $X_1, \dots, X_n$ de X. On souhaite tester $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ contre $H_1 : \sigma^2 = \sigma_1^2$ où $\sigma_0^2 < \sigma_1^2$. Déterminer la région critique du test de rapport de vraisemblance de niveau α.

Exercice 11 On considère une variable aléatoire X de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ et un n-échantillon $X_1, \dots, X_n$ de X. On souhaite tester $H_0 : \mu = \mu_0$ contre $H_1 : \mu \neq \mu_0$.

1. Supposons $\sigma^2 = 1$, déterminer la région critique du test du rapport des vraisemblances de niveau α.
2. Supposons σ^2 inconnu, déterminer la région critique du test du rapport des vraisemblances de niveau α.

Exercice 9 On considère une variable aléatoire discrète X à valeurs dans $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ telle que $\mathbb{P}(X = j) = p_j$ ($\theta = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)$ et $\sum_{i=1}^{5} p_i = 1$) et un n-échantillon $X_1, \ldots, X_n$ de X. On souhaite tester $H_0 : p_1 = p_2 = p_3 \quad \text{et} \quad p_4 = p_5$ contre $H_1 : \overline{H_0}$.

1. Montrer que sous H_0 l'espace paramétrique est de dimension 1 et que $p_4 = p_5 = (1 - 3p_1)/2$.
2. Donner l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ.
3. Donner l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ sous l'hypothèse H_0.
4. Déterminer la région critique du test du rapport des vraisemblances de niveau α.