Université Pierre et Marie Curie
Licence de mathématiques
Télé-enseignement

2004-2005

Intégration

Exercices et Corrigés

en complément du Cours de Gilles Pagès

Jacques Féjoz
fejoz@math.jussieu.fr

Il est nécessaire de chercher longtemps soi-même les exercices, avant de s'aider du corrigé. Je vous encourage à choisir un exercice par chapitre, parmi ceux qui ne sont pas les plus élémentaires, à rédiger sa solution et à m'envoyer votre travail pour que je le corrige. *Adopter une rédaction concise et vérifier scrupuleusement ses démonstrations* : ceux qui suivront ces deux conseils seront récompensés.

Table des matières

CHAPITRE 1

Intégrale de Riemann. Tribus. Mesures

Sommaire

1. Rappels très succincts surl'intégrale de Riemann. Soient $a < b$ deux réels et E un espace de Banach réel. Notons $\mathscr{B}$ l'espace des fonctions bornées de I dans E, muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{t\in I} \|f(t)\|$. Notons aussi $\mathscr{E}$ le sous-espace de $\mathscr{B}$ des fonctions en escalier.

a. Montrer que l'ensemble des subdivisions de I est muni d'une relation d'ordre naturelle. Si α et β sont deux subdivisions de I, on notera $\alpha \vee \beta$ leur borne inférieure pour cette relation d'ordre.

b. Rappeler la définition de l'intégrale de Riemann d'une fonction en escalier $f \in \mathscr{E}$.

c. Interpréter cette définition géométriquement dans le cas où $E = \mathbb{R}$.

d. Montrer que l'application ainsi définie $\mathscr{I} = (\mathscr{E}, \|\cdot\|_\infty) \to (E, \|\cdot\|)$ est linéaire et uniformément continue.

Notons $\mathscr{R}$ l'espace des *fonctions réglées* de I dans E ; par définition, c'est l'adhérence de $\mathscr{E}$ dans $(\mathscr{B}, \|\|_\infty)$.

e. Montrer qu'il existe un unique prolongement continu de l'application $\mathscr{I}$ à $\mathscr{R}$.

Notons $\mathscr{E}(I,\mathbb{R})$ l'espace des fonctions en escalier de I dans $\mathbb{R}$. Quelle que soit $f \in \mathscr{B}$, notons

$$\hat{\mathscr{E}} = \{p \in \mathscr{E}(I,\mathbb{R}),\ \|f(t)\| \leq p(t) \quad \forall t \in I\} \neq \emptyset$$

et

$$N(f) = \inf \mathfrak{I}(f), \mathfrak{I}(f) = \left\{ \int_a^b p(t)\,dt,\ p \in \hat{\mathscr{E}}(f) \right\}.$$

f. Montrer que N définit une semi-norme sur $\mathscr{B}$.

Notons $\mathscr{A}$ l'espace des *fonctions Riemann-intégrables* de I dans E ; par définition, c'ets l'adhérence de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{B}$ pour la topologie de N.

g. Montrer qu'il existe un unique prolongement continu de l'application $\mathscr{I}$ à $\mathscr{A}$.

Correction.

a. Une subdivision de I s'identifie à une partie finie de l'intérieur $]a,b[$ de I. Alors l'ensemble des subdivisions est muni de la relation d'ordre partiel de l'inclusion, et la borne inférieure de deux subdivisions est simplement leur réunion.

b. Soit α une subdivision adaptée à f. Notons $\alpha = \{\alpha_1 < ... < \alpha_n\}$, $\alpha_0 = a$ et $\alpha_{n+1} = b$. La fonction f est de la forme

$$f = \sum_{0 \leq j \leq n} c_j \mathbb{1}_{]\alpha_j,\alpha_{j+1}[} + \sum_{0 \leq j \leq n+1} d_j \mathbb{1}_{\{\alpha_j\}},$$

où $c_j, d_j \in E$ et où, pour toute partie A de I, $\mathbb{1}_A : t \mapsto 1$ si $t \in A$ et 0 si $t \notin A$, dénote la fonction indicatrice de A. Par définition, l'intégrale de Riemann de f est le vecteur

$$\int_a^b f(t)\,dt = \sum_{0 \leq j \leq n} (\alpha_{j+1} - \alpha_j)\, c_j \in E.$$

En prenant une autre subdivision β adaptée à f et en considérant la subdivision $\alpha \vee \beta$ on voit que cette définition ne dépend pas de la subdivision choisie.

c. Dans le cas où $E = \mathbb{R}$, le réel $(\alpha_{j+1} - \alpha_j)\, c_j$ est l'aire algébrique du rectangle bordé par l'axe des abscisses et le graphe de la restriction de f à l'intervalle $]\alpha_j, \alpha_{j+1}[$ (comptée négativement si $c_j < 0$). Donc $\int_a^b f(t)\,dt$ est l'aire algébrique de la région du plan délimitée par l'axe des abscisses et le graphe de f.

d. Soient $f, g \in \mathscr{E}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Soient α une subdivision adaptée à f, β une subdivision adaptée à g, et $\gamma = \alpha \vee \beta$. En utilisant la formule précédente avec la subdivision γ on voit que l'on a $\mathscr{I}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathscr{I}(f) + \mu \mathscr{I}(g)$.

De plus, avec les notations de la question précédente, on a

$$\begin{aligned} \left\| \int_a^b f(t)\,dt \right\| &= \left\| \sum_{0 \leq j \leq n} (\alpha_{j+1} - \alpha_j)\, c_j \right\| \leq \sum_{0 \leq j \leq n} |\alpha_{j+1} - \alpha_j|\, \|c_j\| \\ &\leq \|f\|_\infty \sum_{0 \leq j \leq n} |\alpha_{j+1} - \alpha_j| = (b-a)\, \|f\|_\infty\,, \end{aligned}$$

ce qui montre que $\mathscr{I} : \mathscr{E} \to \mathscr{B}$ est lipschizienne, donc uniformément continue.

e. Supposons que $\tilde{\mathscr{I}}$ soit un prolongement continu de $\mathscr{I}$ à $\mathscr{R}$. Soit f une fonction réglée. Par définition, il existe une suite (ϕ_n) de $\mathscr{E}$ qui converge vers f. En particulier, (ϕ_n) est de Cauchy. Comme $\mathscr{I}$ est uniformément continue, $(\mathscr{I}(\phi_n))$ aussi est de Cauchy. Comme cette dernière est une suite réelle et comme $\mathbb{R}$ est complet, $(\mathscr{I}(\phi_n))$ converge. Comme $\tilde{\mathscr{I}}$ est continu, $\tilde{\mathscr{I}}(f) = \lim_n \mathscr{I}(\phi_n)$. Ceci montre que le prolongement est unique.

En prenant une seconde suite (ψ_n) de fonctions en escalier tendant vers f, on voit que la limite de $\mathscr{I}(\psi_n)$ coïncide forcément avec celle de $\mathscr{I}(\phi_n)$, parce que $\phi_n - \psi_n$ converge vers $0 \in \mathscr{E}$, dont l'intégrale au sens de $\mathscr{I}$ est nulle.
f. N est homogène ($N(\lambda f) = |\lambda| N(f)$) et vérifie l'inégalité triangulaire ($N(f+g) \leq f + g$). Donc c'est une semi-norme. (Le seul axiome qui manque pour en faire une norme est l'axiome de séparation.)

g. L'application $\mathscr{I} : (\mathscr{E}, N) \to (E, \|\cdot\|)$ est uniformément continue, et se prolonge donc comme précédemment en une fonction continue définie sur l'adhérence $\mathscr{A}$ de $\mathscr{E}$.

2. Exemples de limites de sous-ensembles.

a. Déterminer la limite des suites $(A_n)_{n\geq 1}$ et $(A'_n)_{n\geq 1}$ de parties de $\mathbb{R}$ définies par

$$A_n = \left[-\frac{1}{n}, 1\right] \quad \text{et} \quad A'_n = \left]-\frac{1}{n}, 1\right].$$

b. Donner un exemple de suite non constante de parties de $\mathbb{R}$ dont la limite est $]0,1]$.
c. Déterminer les limites supérieure et inférieure de la suite $(B_n)_{n\geq 1}$ de parties de $\mathbb{R}$ définie par

$$B_{2n-1} = \left]-2 - \frac{1}{n}, 1\right] \quad \text{et} \quad B_{2n} = \left[-1, 2 + \frac{1}{n^2}\right[.$$

d. Existe-t-il une suite $(C_n)_{n\geq 1}$ de parties de $\mathbb{R}$ telle que

$$\limsup_n C_n = [-1, 2] \quad \text{et} \quad \liminf_n C_n = [-2, 1] \ ?$$

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels qui convergent respectivement vers -1 et 1.
e. Trouver la condition sur ces deux suites pour que

$$\lim_n \, [a_n, b_n] = [-1, 1[.$$

f. Est-il possible que $\lim_n [a_n, b_n]$ n'existe pas ?

Correction.
a. Les suites (A_n) et (A'_n) sont décroissantes. Donc elles ont une limite.
Si $x \in [0,1]$, alors x appartient à A_n et à A'_n pour tout $n \geq 1$. Donc $[0,1] \subset \lim_n A_n$ et $[0,1] \subset \lim_n A'_n$. Réciproquement, si $x \notin [0,1]$, alors il existe un rang N à partir duquel $x \notin A_n$ et $x \notin A'_n$. Donc

$$\lim_{n\to+\infty} A_n = \lim_{n\to+\infty} A'_n = [0,1].$$

b. Avec le même type d'arguments qu'à la question précédente, on voit que

$$\lim_{n\to+\infty} \left[\frac{1}{n}, 1\right] =]0,1].$$

c. Si $x \in [-2, 1]$, alors x appartient à B_n pour une infinité de valeurs de l'indice n (en l'occurence, toutes les valeurs paires ≥ 2). Il en est de même si $x \in [-1, 2]$ (les valeurs impaires de n jouant maintenant le rôle clef). On a donc $[-2, 2] \subset \limsup_n B_n$. D'autre part, si $x \notin [-2, 2]$, on a $x \notin B_n$ à partir d'un certain rang ; donc x appartient au plus à un nombre fini de parties B_n et $x \notin \limsup_n B_n$. Par conséquent,

$$\limsup_{n\to+\infty} B_n = [-2, 2].$$

Pour la limite inférieure des B_n, on peut utiliser un argument similaire. Si $x \in [-1, 1]$, alors $x \in B_n$ pour tout n. On a donc $[-1, 1] \subset \liminf_n B_n$. D'autre part, si $x \notin [-1, 1]$, il existe une infinité de valeurs de l'indice n pour lesquelles $x \notin B_n$. Donc $x \notin \liminf_n B_n$. Finalement,

$$\liminf_{n\to+\infty} B_n = [-1, 1].$$

d. Non : on a toujours $\liminf_n B_n \subset \limsup_n B_n$ tandis que $[-2, 1]$ n'est pas inclus dans $[-1, 2]$.
e. On a

$$\begin{aligned}\lim_n\, [a_n, b_n] = [-1, 1[\quad &\iff \quad \lim_n \mathbb{1}_{[a_n,b_n]} = \mathbb{1}_{[-1,1[} \\ &\iff \quad a_n \leq -1,\ b_n < 1 \text{ pour tout } n \text{ assez grand.}\end{aligned}$$

f. Oui : par exemple, si $a_n = 1$ et $b_n = 1 + (-1)^n/n$ pour $n \geq 1$, alors en faisant de même qu'à la question (a). on peut vérifier que

$$\limsup_{n\to+\infty} [a_n, b_n] = [-1, 1] \quad \text{et} \quad \liminf_{n\to+\infty} [a_n, b_n] = [-1, 1[\ ;$$

donc $\lim_n\, [a_n, b_n]$ n'existe pas, bien que $\lim_n a_n$ et $\lim_n b_n$ existent toutes deux.

3. Exemples élémentaires de tribus.

a. Quelle est la tribu engendrée par l'ensemble des singletons d'un ensemble E ?
b. À supposer que le cardinal de E est supérieur à 2, quelle est la tribu engendrée par l'ensemble des paires (c'est-à-dire des ensembles à deux éléments) de E ?
c. Une partie A de E étant fixée, quelle est la tribu engendrée par l'ensemble des parties de E contenant A ?
d. Soient $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ deux tribus de E. Décrire simplement la tribu engendrée par $\mathscr{E} \cap \mathscr{F}$, puis de la tribu engendrée par $\mathscr{E} \cup \mathscr{F}$.
e. Quelle est la tribu de $\mathbb{R}$ engendrée par $\mathscr{A} = \{[0, 2], [1, 3]\}$? Quel est son cardinal ?

Correction.
a. Analyse – La tribu $\mathscr{E}$ engendrée par l'ensemble des singletons de E contient les unions finies ou dénombrables de singletons, c'est-à-dire les parties finies ou dénombrables de E. Elle contient donc aussi le complémentaire des parties finies ou dénombrables de E.

Synthèse – L'ensemble des parties A de E telles que A ou A^c est finie ou dénombrable est bien une tribu, et il contient les singletons de E. C'est donc $\mathscr{E}$.
b. Notons $\mathscr{F}$ la tribu engendrée par l'ensemble des paires de E. Les paires de E, en tant qu'unions de deux singletons de E, sont dans la tribu $\mathscr{E}$ de la question précédente. Donc $\mathscr{F} \subset \mathscr{E}$.

Réciproquement, si x, y et z sont trois éléments distincts de E, par exemple le singleton

$$\{x\} = \{x, y\} \cap \{x, z\} = (\{x, y\}^c \cup \{x, z\}^c)^c$$

est dans la tribu $\mathscr{F}$; donc $\mathscr{E} \subset \mathscr{F}$. Donc, si le cardinal de E est supérieur à 3, on a $\mathscr{F} = \mathscr{E}$.

Dans le cas où E est un ensemble à deux éléments, disons $\{1, 2\}$, $\mathscr{F}$ est la tribu grossière $\{\emptyset, E\}$, tandis que $\mathscr{E}$ est la tribu $\mathscr{P}(E) = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, E\}$.

c. La tribu engendrée par l'ensemble des parties de E contenant A est l'ensemble des parties B de E qui contiennent A ou dont l'intersection avec A est vide.
d. Soient $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ deux tribus quelconques de E. La tribu engendrée par

$$\mathscr{E} \cap \mathscr{F} = \{A \in \mathscr{P}(E), A \in \mathscr{E} \text{ et } A \in \mathscr{F}\}$$

est $\mathscr{E} \cap \mathscr{F}$ elle-même. Mais on prendra garde que généralement la partie

$$\mathscr{E} \cup \mathscr{F} = \{A \in \mathscr{P}(E),\ A \in \mathscr{E} \text{ ou } A \in \mathscr{F}\}$$

de $\mathscr{P}(E)$ n'est pas stable par union finie, donc a fortiori pas par union dénombrable. En réalité, la tribu engendrée par $\mathscr{E} \cup \mathscr{F}$ est

$$\sigma(\mathscr{E} \cup \mathscr{F}) = \{A \cup B,\ A \in \mathscr{E} \text{ et } B \in \mathscr{F}\}.$$

e. La tribu de $\mathbb{R}$ engendrée par $\mathscr{A} = \{[0,2],[1,3]\}$ contient forcément

$$\left\{ \begin{array}{l} \emptyset, [0,1[, [1,2],]2,3], [0,2], [0,3], [1,3], [0,1[\cup]2,3], \\ \mathbb{R}, [0,1[^c, [1,2]^2,]2,3]^c, [0,2]^2, [0,3]^2, [1,3]^c, ([0,1[\cup]2,3])^c \end{array} \right\}.$$

Cet ensemble de 16 parties est stable par union et par complémentation. C'est donc la tribu $\sigma(\mathscr{A})$ cherchée.

Une réponse plus conceptuelle consiste à remarquer que $\sigma(\mathscr{A})$ est aussi la tribu engendrée par la partition de $\mathbb{R}$ à 4 éléments $\{[0,1[, [1,2],]2,3], [0,3]^c\}$, et possède donc les 2^4 éléments donnés.

4. Tribus et partitions. On rappelle qu'une partition d'un ensemble E est un recouvrement $(A_j)_{j\in J}$ de E (c'est-à-dire que les A_j sont des parties de A dont la réunion est E tout entier) dont les éléments sont deux à deux disjoint (quels que soient $j,k \in J$ tels que $j \neq k$ on a $A_j \cap A_k = \emptyset$).
a. Soit A une partie d'un ensemble E distincte de l'ensemble vide et de E lui-même. Montrer que la tribu engendrée par $\{A\}$ est l'union de $\{\emptyset, E\}$ et d'une partition.
b. Soit $\mathscr{A} = \{A, B, C\}$ une partition de E en trois sous-ensembles. Décrire la tribu engendrée par $\mathscr{A}$.
c. Plus généralement, décrire la tribu engendrée par une partition dénombrable de E.

Une tribu $\mathscr{E}$ définit naturellement une partition $\mathscr{A}_{\mathscr{E}}$ de E, dont les éléments sont les parties de la forme

$$\bar{x} = \bigcap_{x \in A \in \mathscr{E}} A, \quad x \in E.$$

d. Montrer que $\mathscr{A}_{\mathscr{E}}$ est bien une partition de E.
e. Montrer que si la tribu $\mathscr{E}$ est au plus dénombrable la partition $\mathscr{A}_{\mathscr{E}}$ qui lui est associée engendre $\mathscr{E}$.
f. Montrer que si $\mathscr{E}$ est engendrée par une partition au plus dénombrable $\mathscr{B}$ cette partition est $\mathscr{A}_{\mathscr{E}}$.

g. Quelle partition engendre la tribu de $\mathbb{R}$ engendrée par le singleton $\{[0,1]\}$? et par la paire $\{[0,1],[0,2]\}$? Quel est le cardinal de ces tribus ?
h. Montrer que la tribu $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ n'est engendrée par aucune partition de $\mathbb{R}$.
i. Montrer qu'une tribu infinie $\mathscr{E}$ n'est pas dénombrable et que donc la question (e) ne concerne que les tribus finies. (Indication : Raisonner par l'absurde et montrer que $\mathscr{E}$ serait en bijection avec l'ensemble des parties de la partition qui l'engendre.)

Correction.
a. La tribu engendrée par $\{A\}$ est $\{\emptyset, A, A^c, E\}$. C'est bien l'union de $\{\emptyset, E\}$ et d'une partition $\{A, A^c\}$.
b. La tribu engendrée par une partition $\mathscr{A} = \{A, B, C\}$ est

$$\sigma(\mathscr{A}) = \{\emptyset, E, A, B, C, A^c, B^c, C^c\} = \{\emptyset, E, A, B, C, B \cup C, C \cup A, A \cup B\}.$$

c. La tribu engendrée par une partition au plus dénombrable $\mathscr{A} = \{A_i, i \in I\}$ $(I \subset \mathbb{N})$ contient les unions (forcément au plus dénombrables)

$$\bigcup_{i \in J} A_i$$

de parties $A_i \in \mathscr{A}$, $i \in J$, $J \subset I$.

Or, puisque la partition $\mathscr{A}$ est supposée au plus dénombrable, l'ensemble des telles unions contient $\mathscr{E} = \cup_{A \in \mathscr{A}} A$ et est stable par passage au complémentaire :

$$\left(\bigcup_{i \in J} A_i\right)^c = \bigcup_{j \in J^c} A_j$$

(avec la convention que l'union d'un ensemble vide de sous-ensembles est l'ensemble vide).

Donc $\sigma(\mathscr{A})$ est l'ensemble des unions de parties $A \in \mathscr{A}$.
d. Pour tout $x \in E$ on a $x \in \bar{x}$. Donc $\cup_{x \in E} \bar{x} = E$ et l'ensemble $\mathscr{A}_{\mathscr{E}} = \{\bar{x}\}_{x \in E}$ est un recouvrement de E. Pour voir que $\mathscr{A}_{\mathscr{E}}$ est une partition, il reste à montrer que deux parties distinctes de E appartenant à $\mathscr{A}_{\mathscr{E}}$ sont disjointes. De façon équivalente, considérons deux parties $\bar{x}, \bar{y} \in \mathscr{A}_{\mathscr{E}}$ non disjointes et montrons qu'elles coïncident. Il existe $z \in \bar{x} \cap \bar{y}$. Comme $z \in \bar{x}$, z appartient à toutes les parties A mesurables contenant x. Donc $\bar{z} \subset \bar{x}$. Réciproquement, montrons que $\bar{x} \subset \bar{z}$. Supposons d'abord que $x \notin \bar{z}$. Alors il existe une partie mesurable $A \in \mathscr{E}$ telle que $z \in A$ et $x \notin A$, donc $z \notin A^c$ et $x \in A^c$. Comme $\mathscr{E}$ est une tribu, $A^c \in \mathscr{E}$. Donc $z \notin \bar{x}$, ce qui est contraire aux hypothèses. Donc $x \in \bar{z}$. Mais alors le même argument qui a servi à montrer que $\bar{z} \subset \bar{x}$ montre l'inclusion inverse. Finalement, $\bar{x} = \bar{z}$. Par symétrie, on a de même $\bar{y} = \bar{z}$. Par transitivité on a $\bar{x} = \bar{y}$. Donc $\mathscr{A}_{\mathscr{E}}$ est bien une partition de E.
e. Si $\mathscr{E}$ est une tribu au plus dénombrable, $\bar{x}$ est l'intersection au plus dénombrable de parties $A \in \mathscr{E}$, donc $\bar{x} \in \mathscr{E}$. Comme pour tout $x \in E$ on a $x \in \bar{x}$, pour toute partie $A \in \mathscr{E}$ on a

$$A \subset \bigcup_{x \in A} \bar{x}.$$

Mais d'après la définition des classes $\bar{x}$, l'inclusion inverse est vraie aussi, de sorte que pour toute partie $A \in \mathscr{E}$ on a

$$A = \bigcup_{x \in A} \bar{x}.$$

D'après la question précédente, ceci montre que la tribu $\mathscr{E}$ est engendrée par la partition $\mathscr{A}_{\mathscr{E}} = \{\bar{x},\ x \in E\}$.

f. Supposons que $\mathscr{E}$ est engendrée par une partition au plus dénombrable $\mathscr{B}$. Pour tout $x \in E$ on a $\bar{x} = \cap_{x \in A \in \mathscr{B}} A \in \mathscr{B}$. Donc $\mathscr{A}_{\mathscr{E}} \subset \mathscr{B}$.

Réciproquement, soit $B \in \mathscr{B}$ et supposons par l'absurde que $B \notin \mathscr{A}_{\mathscr{E}}$. Soit $x \in B$. Par définition de $\bar{x}$ on a $\bar{x} \subset B$. Comme $B \notin \mathscr{A}_{\mathscr{E}}$, on a donc $B \not\subseteq \bar{x}$. Mais $\bar{x} \in \mathscr{B}$, ce qui est incompatible avec le fait que $\mathscr{B}$ est une partition.

g. La tribu de $\mathbb{R}$ engendrée par la singleton $\{[0,1]\}$ est, d'après la question (a),

$$\mathscr{E} = \{\emptyset, [0,1], [0,1]^c, \mathbb{R}\}.$$

Elle est donc engendrée par la partition

$$\{[0,1], [0,1]^c\} = \{[0,1],]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[\}$$

et possède $2^2 = 4$ éléments. (Remarquons que $[0,1]^c$ n'est pas connexe, puisqu'il est constitué de deux segments ; pourtant, contrairement à une erreur commune, il n'y a aucune raison de séparer ses deux composantes connexes.)

La tribu engendrée par la paire $\{[0,1], [0,2]\}$ est aussi engendrée par $\{[0,1],]1,2]\}$, donc aussi par la partition

$$\{[0,1],]1,2],]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[\} \ ;$$

elle possède $2^3 = 8$ éléments.

h. Supposons d'abord que la tribu $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ de $\mathbb{R}$ est engendrée par une partition $\mathscr{A}$ dont les classes d'équivalence ne soient pas toutes des singletons de $\mathbb{R}$. Soit $A \in \mathscr{A}$ une classe non réduite à un singleton. La tribu engendrée par $\mathscr{A}$ est incluse dans la tribu engendrée par l'ensemble des parties de E contenant A. Mais d'après la question (c) de l'exercice (2), cette dernière est strictement incluse dans $\mathscr{P}(\mathbb{R})$. Ceci est contraire à l'hypothèse.

Donc la tribu $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ ne peut être engendrée a priori que par la partition $\{\{x\},\ x \in \mathbb{R}\}$. D'après la question (a) de l'exercice (2), cette partition n'engendre que la tribu des parties qui sont au plus dénombrables ou de complémentaire au plus dénombrable ; or par exemple ni l'intervalle $[0, +\infty[$ ni son complémentaire ne sont dénombrables. Donc la partition de $\mathbb{R}$ en singletons n'engendre pas $\mathscr{P}(\mathbb{R})$.

Finalement, aucune partition de $\mathbb{R}$ n'engendre la tribu $\mathscr{P}(\mathbb{R})$.

i. Supposons par l'absurde que $\mathscr{E}$ est une tribu (infinie) dénombrable. D'après la question (d) elle est engendrée par une partition $\mathscr{A}$ et les parties A de $\mathscr{E}$ sont exactement les unions de classes $A_n \in \mathscr{A}$. Donc $\mathscr{E}$ est en bijection avec $\mathscr{P}(\mathscr{A})$. De deux choses l'une : soit la partition $\mathscr{A}$ est finie, auquel cas $\mathscr{E}$ elle-même est finie ; soit $\mathscr{A}$ est infinie, auquel cas $\mathscr{E}$ a au moins la puissance du continu. Ceci est en contradiction avec l'hypothèse.

5. Tribus et topologies. On rappelle qu'une *topologie* sur un ensemble E est une partie de $\mathscr{P}(E)$ qui contient $\emptyset$ et E et qui est stable par intersection finie et par union quelconque. Les éléments d'une topologie sont les *(ensembles) ouverts*.

a. Comparer les axiomes définissant respectivement une tribu et une topologie.

b. Donner un exemple de topologie qui ne soit pas une tribu.

Soit S une partie quelconque de $\mathscr{P}(E)$. La *topologie engendrée* par S est la plus petite topologie contenant S. C'est donc l'ensemble des parties de E qui s'obtiennent par intersections finies et unions quelconques d'éléments de S.

c. Comparer la tribu et la topologie engendrées par une partition dénombrable de E.

Correction.

a. Les définitions de tribu et de topologie diffèrent par les propiétés suivantes : une tribu est stable par passage au complémentaire et une topologie est stable par union quelconque (et non seulement dénombrable).
b. La topologie usuelle de $\mathbb{R}$, engendrée par les intervalles ouverts, n'est pas une tribu parce qu'elle n'est pas stable par passage au complémentaire : par exemple un singleton $\{x\}$, $x \in \mathbb{R}$, ne s'obtient pas comme union d'intersections finies d'intervalles ouverts.
c. La tribu et la topologie engendrées par une partition dénombrable $\mathscr{A}$ de E sont toutes deux l'ensemble des unions de parties $A \in \mathscr{A}$ (cf. exercice 3).

(Mais généralement les deux notions ne coïncident pas. Par exemple, les topologies usuelles sont rarement stables par passage au complémentaire, puisque dans ce cas chaque composante connexe serait munie de la topologie grossière. Donc avec les topologies généralement utilisées les tribus boréliennes contiennent strictement la topologie qui les engendre.)

9. Exemples d'applications mesurables. Soit E un ensemble.
a. Soient $\mathscr{E}$ une tribu de E et A une partie de E. Montrer que la fonction indicatrice $\mathbb{1}_A$ est $\mathscr{E}$-mesurable si et seulement si $A \in \mathscr{E}$.
b. Soient $\mathscr{A}$ une partition au plus dénombrable de E, $\mathscr{E}$ la tribu engendrée par $\mathscr{A}$ et f une fonction réelle sur E. Montrer que f est $\mathscr{E}$-mesurable si et seulement si elle est constante sur chaque partie $A \in \mathscr{A}$.
c. Soient $\mathscr{E}$ une tribu de E, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables réelles sur E et A l'ensemble des éléments x de E tels que la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ soit de Cauchy. Montrer que $A \in \mathscr{E}$.
d. L'inverse d'une bijection mesurable est-elle toujours mesurable ?
e. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = 1/x$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ est borélienne.

Correction.
a. Pour toute partie borélienne B de $\mathbb{R}$, l'image inverse de B par $\mathbb{1}_A$ est A, A^c ou E selon que B contient respectivement 1 et pas 0, 0 et pas 1, ou $\{0, 1\}$. Donc $\mathbb{1}_A$ est mesurable si et seulement si $A \in \mathscr{E}$.
b. Supposons d'abord que f est constante sur chaque partie $A \in \mathscr{A}$. Notons a_A la valeur prise par f sur chaque partie A. On a $f = \sum_{A\in\mathscr{A}} a_A \mathbb{1}_A$. D'après la question précédente, chaque fonction $\mathbb{1}_A$ est mesurable. Comme $\mathscr{A}$ est au plus dénombrable, f est donc la limite d'une suite de fonctions mesurables. Donc f elle-même est mesurable.

Réciproquement, supposons par l'absurde que f est $\mathscr{E}$-mesurable mais qu'il existe une partie $A \in \mathscr{A}$ et deux éléments de A sur lesquels f prenne deux valeurs distinctes, disons y et z. Considérons les deux parties $B = A \cap \{f = y\}$ et $C = A \cap \{f = z\}$. B et C sont deux parties non vides, disjointes, et sont dans $\mathscr{E}$. En particulier ce sont des unions de parties $C \in \mathscr{A}$. Or elles ont toutes deux une intersection non vide avec $A \in \mathscr{A}$. Ceci est absurde.

c. Un élément x de E appartient à A si et seulement si pour tout entier $n \geq 1$ il existe un entier N tel que pour tout entier $p \geq N$ et pour tout entier $q \geq N$ on ait $|f_p(x) - f_q(x)| \leq 1/n$. Donc

$$A = \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{N\geq 0} \bigcap_{p\geq N} \bigcap_{q\geq N} \{|f_p - f_q| \leq 1/n\}.$$

Or, p et q étant fixés, les fonctions f_p et f_q étant mesurable, il en est de même de $|f_p - f_q|$. Comme l'intervalle $[0, 1/n[$ est borélien, les parties $\{|f_p - f_q| \leq 1/n\}$ appartienent à $\mathscr{E}$, ainsi donc, grâce à la stabilité de $\mathscr{E}$ par unions et intersections dénombrables, que A.

Autre démonstration : Puisque $\mathbb{R}$ est un espace métrique complet, pour tout $x \in E$ la suite réelle $(f_n(x))_n$ est de Cauchy si et seulement si elle est convergente dans $\mathbb{R}$, donc si et seulement si la fonction $h = \limsup f_n - \liminf f_n$ s'annule en x. Donc

$$A = h^{-1}(\{0\}).$$

Or h est mesurable, et le singleton $\{0\}$ est borélien. Donc A est $\mathscr{E}$-mesurable.

d. Non. Un contre-exemple est donné par l'identité $id : x \mapsto x$ de $(E, \mathscr{P}(E))$ dans $(E, \{\emptyset, E\})$, où $E = \{0, 1\}$; en effet, $\{0\} \in \mathscr{P}(E)$ alors que $(id^{-1})^{-1}(\{0\}) = \{0\} \notin \{\emptyset, E\}$.

e. Pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$, notons

$$g_n(x) = \begin{cases} n & \text{si } |x| \leq 1/n \\ 1/x & \text{si } |x| \geq 1/n \end{cases}$$

et

$$h_n(x) = g_n(x)\, \mathbb{1}_{\mathbb{R}_*} + 0.\mathbb{1}_{\{0\}} = g_n(x)\, \mathbb{1}_{\mathbb{R}_*}.$$

Pour tout n les fonctions $g_n : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ sont continues, donc boréliennes. Comme $\mathbb{R}_*$ est ouvert, il est borélien ; donc la fonction indicatrice de cette partie de $\mathbb{R}$ est borélienne. Donc $h_n : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ est borélienne, comme produit de deux fonctions boréliennes. Or (h_n) converge simplement vers la fonction f. Donc cette dernière est borélienne.

Une variante astucieuse consiste à introduire la suite des fonctions f_n définies par $f_n(x) = x/(x^2 + n)$, qui sont continues sur $\mathbb{R}$, donc boréliennes ; (f_n) converge simplement vers f donc f est borélienne.

Deuxième démonstration : La fonction $g : \mathbb{R} \mapsto \bar{\mathbb{R}}$ telle que $g(x) = 1/|x|$ si $x \neq 0$ et $g(0) = +\infty$ est continue, donc borélienne. Comme de plus $\mathbb{R}_*$ est borélien, la fonction $f = g\,(\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*} - \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-^*})$ est borélienne quand on la voit comme une fonction $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R})) \mapsto (\bar{\mathbb{R}}, \mathscr{B}(\bar{\mathbb{R}}))$. Or f est à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $\mathscr{B}(\mathbb{R}) \subset \mathscr{B}(\bar{\mathbb{R}})$. Donc f est borélienne de l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ dans lui-même.

10. Tribu image réciproque. Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. Soit $\mathscr{F}_0$ une tribu donnée de F.

a. Vérifier que $f : (E, \mathscr{P}(E)) \to (F, \mathscr{F}_0)$ est mesurable.

L'*image réciproque* de la tribu $\mathscr{F}_0$ par f est la classe de parties de E notée $f^{-1}(\mathscr{F}_0)$ et définie par $f^{-1}(\mathscr{F}_0) = \{f^{-1}(B),\ B \in \mathscr{F}_0\}$; on la note aussi $f^{-1}(\mathscr{F}_0) = \sigma(f)$.

b. Vérifier que l'image réciproque de $\mathscr{F}_0$ par f est une tribu.

c. Montrer que si $\mathscr{E}$ est une tribu rendant $f : (E, \mathscr{E}) \to (F, \mathscr{F}_0)$ mesurable alors $f^{-1}(\mathscr{F}_0) \subset \mathscr{E}$ (autrement dit $f^{-1}(\mathscr{F}_0)$ est la plus *grossière* des telles tribus $\mathscr{E}$).

d. Déterminer la tribu $f^{-1}(\mathscr{F}_0)$ dans le cas où $(F, \mathscr{F}_0) = (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ et où f est étagée.

e. Déterminer une classe de parties de E qui engendre $f^{-1}(\mathscr{F}_0)$ dans le cas où $E = F = \mathbb{R}$, où $\mathscr{F}_0 = \mathscr{B}(\mathbb{R})$ et où f est la fonction sinus.

Correction.

a. Pour toute partie $B \in \mathscr{F}_0$ de F, $f^{-1}(B)$ est par définition une partie de E, donc est dans $\mathscr{P}(E)$.
b. L'image réciproque de $\mathscr{F}_0$ par f est une tribu grâce aux propriétés de commutation que f^{-1} verifie avec les opérations ensemblistes (formules de Hausdorff).
c. Soit $\mathscr{E}$ une tribu rendant $f : (E, \mathscr{E}) \to (F, \mathscr{F}_0)$ mesurable. Pour toute partie $A \in f^{-1}(\mathscr{F}_0)$ il existe $B \in \mathscr{F}_0$ telle que $A = f^{-1}(B)$; donc $A \in \mathscr{E}$. Donc $\mathscr{F}_0$ est plus grossière que $\mathscr{E}$.
d. Si f est une fonction réelle étagée, elle s'écrit comme une somme finie

$$f = \sum_{y \in f(E)} y \mathbb{1}_{\{f=y\}}.$$

Donc $f^{-1}(\mathscr{B}(\mathbb{R}))$ contient exactement les unions d'ensembles de niveaux $\{f = y\}$ de f. Autrement dit, $f^{-1}(\mathscr{B})$ est la tribu engendrée par la partition de E en les ensembles de niveaux de f.
e. La tribu borélienne de $\mathbb{R}$ est engendrée par les intervalles ouverts bornés B de $\mathbb{R}$. Donc la tribu image réciproque de $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ par sin est engendrée par les images réciproques de tels intervalles par sin. Il suffit donc de déterminer ces dernières. Comme la fonction sin est à valeurs dans $[-1, 1]$, on peut supposer sans perte de généralité que B est inclus dans $[-1, 1]$. Pour $y \in [-1, 1]$, notons $\arcsin y$ l'unique angle $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ dont le sinus vaut y. Comme sin est 2π-périodique et possède la symétrie $\sin x = \sin(\pi - x)$ pour tout x, on a

$$\sin^{-1}(B) = \Big(\arcsin B \bigcup (\pi - \arcsin B)\Big) + 2\pi\mathbb{Z},$$

où par exemple $\pi - \arcsin B$ est une notation abrégée pour $\{\pi - \arcsin y, y \in B\}$.

11. Tribu image directe. Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. Soit $\mathscr{E}_0$ une tribu donnée de E.
a. Montrer que $f : (E, \mathscr{E}_0) \to (F, \{\emptyset, F\})$ est mesurable.

L'*image directe* de $\mathscr{E}_0$ par f est la classe de parties de F notée $f(\mathscr{E}_0)$ et définie par $f(\mathscr{E}_0) = \{B \subset F,\ f^{-1}(B) \in \mathscr{E}_0\}$.
b. Vérifier que l'image directe de $\mathscr{E}_0$ par f est une tribu, et qu'en revanche $\{f(A),\ A \in \mathscr{E}_0\}$ n'en est pas une en général.
c. Montrer que si $\mathscr{F}$ est une tribu rendant $f : (E, \mathscr{E}_0) \to (F, \mathscr{F})$ mesurable alors $\mathscr{F} \subset f(\mathscr{E}_0)$ (autrement dit $f(\mathscr{E}_0)$ est la plus *fine* des telles tribus $\mathscr{F}$).
d. Si f est une fonction constante, déterminer la tribu $f(\mathscr{E}_0)$.
e. Soient $A \in \mathscr{E}_0$ une partie E et a et b deux éléments distincts de F. Déterminer $f(\mathscr{E}_0)$ dans le cas où f est la fonction à deux valeurs définie par $f(x) = a$ si $x \in A$ et $f(x) = b$ si $x \notin A$.
f. Faire de même en supposant maintenant que A n'est pas dans $\mathscr{E}_0$.

Correction.
a. $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathscr{E}_0$ et $f^{-1}(F) = E \in \mathscr{E}_0$, donc $f : (E, \mathscr{E}_0) \to (F, \{\emptyset, F\})$ est mesurable.
b. Le fait que l'image directe de $\mathscr{E}_0$ par f est une tribu découle des formules de Haussdorff.

En revanche $\{f(A),\ A \in \mathscr{E}_0\}$ n'est pas forcément une tribu. Par exemple, si f n'est pas surjective alors $F \notin \{f(A),\ A \in \mathscr{E}_0\}$.
c. Soit $\mathscr{F}$ une tribu rendant $f : (E, \mathscr{E}_0) \to (F, \mathscr{F})$ mesurable. Pour toute partie $B \in \mathscr{F}$, $f^{-1}(B) \in \mathscr{E}_0$; donc, par définition de $f(\mathscr{E}_0)$, on a $B \in f(\mathscr{E}_0)$. Donc $f(\mathscr{E}_0)$ est plus fine que $\mathscr{F}$.
d. Si f est une fonction constante, montrons que $f(\mathscr{E}_0) = \mathscr{P}(F)$. Notons y l'unique valeur de f. Soit $B \in \mathscr{P}(F)$. Si $y \in B$ alors $f^{-1}(B) = E \in \mathscr{E}_0$ donc $B \in f(\mathscr{E}_0)$; inversement si $y \notin B$ alors $f^{-1}(B) = \emptyset \in \mathscr{E}_0$ donc $B \in f(\mathscr{E}_0)$. Donc $f(\mathscr{E}_0) = \mathscr{P}(F)$.

e. Pour toute partie $B \in \mathscr{P}(F)$ on a

$$f^{-1}(B) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } \{a,b\} \cap B = \emptyset \\ A & \text{si } a \in B \text{ et } b \notin B \\ A^c & \text{si } a \notin B \text{ et } b \in B \\ E & \text{si } \{a,b\} \subset B. \end{cases}$$

Donc $f(\mathscr{E}_0) = \mathscr{P}(F)$.

f. Supposons maintenant que A n'est pas dans $\mathscr{E}_0$. Une partie B de F est dans $f(\mathscr{E}_0)$ si et seulement si $f^{-1}(B) \in \mathscr{E}_0$, c'est-à-dire, d'après le raisonnement de la question précédente, si $f^{-1}(B) = \emptyset$ ou $\mathbb{R}$, c'est-à-dire si B contient soit ni a ni b, soit les deux. Donc $f(\mathscr{E}_0)$ est la tribu engendrée par l'ensemble des parties de F qui contiennent a et b ou qui sont d'intersection vide avec la paire $\{a,b\}$.

13. Partitions, extractions et mesurabilité. Soient $(E,\mathscr{E})$ un espace mesurable et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables sur $(E,\mathscr{E})$.

a. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une partition dénombrable de E telle que $A_n \in \mathscr{E}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que la fonction f définie sur E par

$$f(x) = f_n(x) \quad \text{si } x \in A_n$$

est une fonction $\mathscr{E}$-mesurable.

b. Si N est une application mesurable de $(E,\mathscr{E})$ dans $(\mathbb{N},\mathscr{P}(\mathbb{N}))$, montrer que la fonction g définie sur E par

$$g(x) = f_{N(x)}(x)$$

est $\mathscr{E}$-mesurable.

Correction.

a. Pour toute partie borélienne A de $\mathbb{R}$, on a

$$f^{-1}(A) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(A_n \cap {f_n}^{-1}(A)\right).$$

Or les fonctions f_n sont mesurables donc ${f_n}^{-1}(A) \in \mathscr{E}$ pour tout entier n. Par suite, les axiomes de définition d'une tribu font que $f^{-1}(A)$ est dans $\mathscr{E}$. Donc f est mesurable.

b. Cette question est un cas particulier de la précédente : en effet, si l'on pose $A_n = \{x : N(x) = n\}$, on obtient $f = g$, et par ailleurs les A_n ainsi définis sont bien dans $\mathscr{E}$ car N est mesurable.

15. Mesure invariante par une application *. Soient $(E,\mathscr{E})$ un espace mesurable et f une application mesurable de $(E,\mathscr{E})$ dans lui-même. On pourra penser à l'ensemble E comme à l'espace des états d'un système physique, aux parties $A \in \mathscr{E}$ comme aux événements observables dans une expérience donnée (par opposition aux états $x \in E$, identifiables aux singletons $\{x\}$, qui correspondraient à une connaissance complète du système et qui exigeraient donc une précision maximale pour être détectés), et à f comme à l'application qui régit l'évolution du système entre deux instants successifs : si l'état est $x = f^0(x)$ au temps $t = 0$, l'état sera $f(x) = f^1(x)$ au temps $t = 1$, $f(f(x)) = f^2(x)$ au temps $t = 2$, etc.

a. Justifier en une phrase que l'ensemble des événements observables dans une expérience est, par nature, stable par complémentation et par réunion finie (si de plus il contient l'ensemble E lui-même, un tel ensemble de parties, s'appelle une *algèbre de Boole*). Que penser de l'axiome de stabilité par union dénombrable ?

b. Montrer que la mesure image $f_*\mu$ (voir la définition ci-dessus) est bien une mesure sur $(E, \mathscr{E})$.

c. Considérons le cas où $(E, \mathscr{E}) = (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$, où $f(x) = 2x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et où μ est la mesure de Lebesgue. Calculer la mesure $f_*\mu$ des intervalles du type $[a, b]$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $a < b$.

Une mesure μ sur $(E, \mathscr{E})$ est f-invariante si $f_*\mu = \mu$.

d. Interpréter en une phrase le fait que f préserve μ, dans le cas où E est un domaine de l'espace physique où a lieu un écoulement fluide stationnaire, où μ est la mesure de Lebesgue et où $f(x) \in E$ est la position à l'instant $t = 1$ d'une particule du fluide qui se trouvait en $x \in E$ à l'instant $t = 0$.

e. Donner un exemple de fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ différente de l'identité, telle que la mesure de Lebesgue soit f-invariante.

f. Si f est la fonction définie dans la question (c), déterminer toutes les mesures finies f-invariantes sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$.

g. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \{1, ..., n\}$ et $\mathscr{E} = \mathscr{P}(E)$. Soit f une permutation de E. Déterminer les mesures f-invariantes sur $(E, \mathscr{E})$. On rappelle que f détermine une partition $\mathscr{A}$ de E, constituée des cycles de f ; autrement dit, les parties $A \in \mathscr{A}$ sont de la forme $A = \{n_1, ..., n_k\}$, avec $f(n_i) = n_{i+1}$ pour $i = 1, ..., k-1$ et $f(n_k) = n_1$.

Correction.

a. Observer qu'un événement A se produit, c'est observer que l'événement contraire A^c ne se produit pas, et vice-versa ; donc l'ensemble $\mathscr{E}$ des événements observables est naturellement stable par passage au complémentaire. De même, observer que l'un des deux événements A ou B se produit, c'est observer que l'événement $A \cup B$ se produit ; donc l'ensemble $\mathscr{E}$ est naturellement stable par union finie. Donc l'ensemble $\mathscr{E}$ des événements observables est naturellement une algèbre booléenne.

L'axiome de stabilité par union dénombrable est moins intuitif, comme tout ce qui a trait à l'infini. C'est la pratique mathématique qui a vraiment imposé cet axiome, sans lequel les algèbres de Boole sont des objets trop généraux pour avoir une riche théorie de la mesure.

b. $f_*\mu$ est bien définie sur $\mathscr{E}$ parce que f est mesurable. D'autre part, comme $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, on a $(f_*\mu(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$. Enfin, soit $(A_n)_n$ est une famille d'éléments, deux à deux disjoints, de la tribu $\mathscr{E}$. On a $f^{-1}(\cup_n A_n) = \cup_n f^{-1}(A_n)$. La famille $(f^{-1}(A_n))_n$ est disjointe, donc la propriété de σ-additivité de μ implique celle de $f_*\mu$. Donc $f_*\mu$ est une mesure sur $(E, \mathscr{E})$.

c. Si $a < b$ on a

$$f_*\mu([a,b]) = \mu([a/2, b/2]) = \frac{b-a}{2}.$$

d. Supposons que E est un domaine de l'espace physique où se produit un écoulement fluide et que μ est la mesure de Lebesgue, c'est-à-dire le volume euclidien sur E. Notons $f_n(x) \in E$ est la position à l'instant $t = n$ d'une particule du fluide qui se trouvait en $x \in E$ à l'instant $t = 0$. Si l'écoulement est stationnaire, la suite des applications f_n est stationnaire: $f_n = f_{n+1}$ pour tout n, et l'on peut noter f l'application d'évolution du fluide entre deux instants n et $n+1$ quelconques séparés par une unité de temps.

Dans ces conditions, si de plus μ est f-invariante, pour tout borélien A de E on a $(f_*\mu)(A) = \mu(A) = \mu(f^{-1}(A))$; le fluide qui se trouvait dans le domaine $f^{-1}(A)$ à l'instant n se trouve dans le domaine A à l'instant $n+1$, et l'égalité dit précisément que le volume de cette partie du fluide est inchangé. L'invariance du volume μ par la loi d'évolution f est donc la traduction mathématique de la propriété physique d'incompressibilité.

e. La mesure de Lebesgue est invariante par exemple par la translation $f : x \mapsto x+1$. En fait, c'est évident sur les intervalles, puisque si $a < b$ on a

$$f_*\lambda([a,b]) = \lambda([a+1, b+1]) = b - a = \lambda([a,b])\ ;$$

mais l'invariance de λ par f en général découle du théorème de prolongement de Carathéodory.

f. Soit μ une mesure invariante pour la fonction f de la question (d). Pour tout $x > 0$, on a $\mu([0,x]) = \mu([0,x/2])$ donc, puisque μ est supposée finie, $\mu(]x/2, x]) = 0$. Comme $]0, +\infty]$ est une union dénombrable de tels intervalles, $\mu(]0,+\infty[) = 0$. De même, $\mu(]-\infty, 0[) = 0$. Donc $\mu(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = 0$. Finalement, on voit que μ ne charge que le singleton $\{0\}$. Notons $m = \mu(\{0\}) \in [0, +\infty[$. Alors $\mu = m\,\delta_0$, où $m \in [-\infty, \infty]$ et où δ_0 est la mesure de Dirac en 0.

g. Soit μ une mesure sur E. Notons $a_x = \mu(\{x\})$, $x \in X$. Comme X est fini on a $\mu = \sum_{x\in X} a_x \delta_x$.

Supposons μ f-invariante. Pour tout $x \in X$, on a $a_x = a_{f^{-1}(x)}$, et, par récurrence on voit que si x et y appartiennent au même cycle de f on a $a_x = a_y$. Donc la fonction $x \in X \mapsto a_x$ est constante sur chaque cycle de f ; autrement dit, elle induit une fonction $\bar{a}$ sur $\mathscr{A}$. Réciproquement, si a induit par passage au quotient une fonction sur la partition $\mathscr{A}$, la mesure μ est bien f-invariante.

Donc les mesures f-invariantes sont les mesures de la forme

$$\mu = \sum_{A\in\mathscr{A}} \bar{a}_A \left(\sum_{x\in A} \delta_x \right), \quad \text{avec } \bar{a} : A \in \mathscr{A} \mapsto \bar{a}_A \in [0, +\infty]\ ;$$

autrement dit, ce sont les mesures μ qui, restreintes à chaque cycle de f est sont uniformes.

16. Le théorème de récurrence de Poincaré. Soient $(E, \mathscr{E}, \mu)$ un espace de probabilité et $f : E \to E$ une application mesurable qui préserve μ : $f_*\mu = \mu$.

Si $A \in \mathscr{E}$ et $x \in A$, x est *A-récurrent* s'il existe une infinité d'entiers naturels n tels que la n-ième image itérée de x par f soit dans A : $f^n(x) \in A$. Notons $\hat{A}$ l'ensemble des points A-récurrents.

a. Montrer que, pour toute partie $A \in \mathscr{E}$, $\hat{A}$ est de mesure pleine dans A, c'est-à-dire que $\mu(\hat{A}) = \mu(A)$ (théorème de récurrence de Poincaré, 1899) ; on pourra considérer l'ensemble mesurable $B = A \setminus \hat{A}$ des points de A qui ne sont pas A-récurrents, écrire B comme la réunion dénombrable des ensembles B_n des points de A qui ne retournent pas dans A après un temps fini n $(n \geq 1)$, montrer que pour tout $n \geq 1$ les parties $f^{-nk}(B_n)$, $k \in \mathbb{N}$, sont deux à deux disjointes, puis conclure en utilisant la finitude de μ.

Considérons une boîte séparée en deux par une cloison étanche, et supposons qu'un gaz constitué d'un grand nombre N de molécules soit initialement confiné dans l'une des deux parties. Si on enlève la cloison, l'expérience montre que le système évolue vers son équilibre statistique où les molécules de gaz sont réparties uniformément, à de petites fluctuations près, dans toute la boîte ; cette constatation a été formalisée par le Second Principe de la Thermodynamique.

b. Cette expérience est-elle compatible avec le théorème de récurrence de Poincaré (paradoxe d'Ehrenfest, 1957) ?

Correction.

a. On a

$$\hat{A} = \{x \in A,\ \forall n \geq 1\ \exists p \geq n\ f^p(x) \in A\},$$

donc le complémentaire B de $\hat{A}$ dans A est

$$B = \{x \in A,\ \exists n \geq 1\ \forall p \geq n\ f^p(x) \notin A\} = \cup_{n \geq 1} B_n,$$

avec

$$B_n = \{x \in A,\ \forall p \geq n\ f^p(x) \notin A\}.$$

L'ensemble B_n est donc la partie de A des points qui ne reviennent plus dans A à partir du temps n.

Fixons un entier $n \geq 1$. La suite $(f^{-p}(B_n))_{p \geq 1}$ de parties de E n'a pas de raison, en générale, d'être disjointe. Nous allons cependant montrer que la suite extraite $(f^{-kn}(B_n))_{k \geq 1}$ obtenue en ne gardant que les exposants p multiples de n est disjointe. Supposons par l'absurde qu'il existe deux entiers $1 \leq k < l$ tels que $f^{-kn}(B_n) \cap f^{-ln}(B_n) \subset E$ soit non vide. Soit x un point dans cette intersection. Alors le point $y = f^{nk}(x)$ appartient à B_n et son image par $f^{n(l-k)}$ aussi, puisque

$$B_n \ni f^{nl}(x) = f^{n(l-k)}(f^{nk}(x)).$$

Or B_n est l'ensemble des points $z \in A$ tels que z ne revient plus dans A à partir du temps n. Ceci est en contradiction avec les propriétés de y, puisque $n(l-k) \geq n$. Donc la suite $(f^{-kn}(B_n))_{k \geq 1}$ est disjointe.

Comme μ est invariante par f, les parties $f^{-nk}(B_n)$, $k \geq 1$, ont toutes même mesure $\mu(B_n)$. Comme μ est finie, cette mesure est nulle. En particulier, B_n est de mesure nulle pour tout entier $n \geq 1$. La σ-additivité de μ implique

$$\mu(B) = \mu\left(\cup_{n \geq 1} B_n\right) \leq \sum_{n \geq 1} \mu(B_n) = 0.$$

Comme A est l'union disjointe de $\hat{A}$ et de B, on a bien $\mu(A) = \mu(\hat{A}) + \mu(A \setminus \hat{A}) = \mu(\hat{A})$, soit $\mu(\hat{A}) = \mu(A)$.

(Un renforcement considérable de ce théorème de Poincaré, dû à Birkhoff (1931), fera l'objet d'un exercice ultérieur.)

b. Pour l'expérience décrite, l'espace E est l'espace des phases du gaz, c'est-à-dire l'espace des positions et des vitesses de chacune des N particules (voir n'importe quel livre de Mécanique statistique, par exemple celui de Landau et Lifshitz). Comme N est typiquement de l'ordre de la constante d'Avogadro $\simeq 10^{23}$, la dimension $6N$ de E est très grande. L'application f est celle qui régit l'évolution du système pendant par exemple une unité de temps.

Admettons que les hypothèses du théorème de Poincaré sont vérifiées et considérons une partie mesurable A qui soit une boule de petit rayon, centrée en la condition initiale choisie, où les molécules sont toutes dans une moitié de la boîte, avec des vitesses données. Le théorème de Poincaré affirme qu'avec une probabilité totale par rapport aux conditions initiales dans A

l'état du système repassera par A, et même une infinité de fois. Autrement dit, en attendant suffisament longtemps on est certain de voir le gaz, sans aucune influence extérieure, se confiner dans une moitié de la boîte !

Mais le théorème de Poincaré ne dit rien quant au temps n minimum pour revenir à une situation très dissymétrique ; or ce temps peut être très long, plus long que la durée d'une expérience de laboratoire, voire même que la durée de vie de l'univers. À l'inverse, les lois de la thermodynamique ne sont justifiées, en Mécanique statistique, qu'à la limite quand le nombre N de particules tend vers l'infini et donc quand le temps de retour à une situation très dissymétrique tend vers l'infini. Donc les domaines de validité de ces deux prédictions divergentes sont disjoints.

17. Entropie d'une partition. Soit E un ensemble de cardinal fini $n \geq 1$, muni de la tribu discrète $\mathscr{P}(E)$ et de la mesure de probabilité uniforme μ, c'est-à-dire telle que pour tout $x \in E$ on ait $\mu(\{x\}) = 1/n$.

Maintenant soit $\mathscr{A}$ une partition de E. L'*entropie* de $\mathscr{A}$ est le réel positif

$$H(\mathscr{A}) = -\sum_{A\in\mathscr{A}} \mu(A)\ln\mu(A).$$

a. Quelle est l'unique partition d'entropie nulle ?
b. Soit A une partie de E de cardinal k telle que $0 < k < n$. Quelle est l'entropie de la partition $\{A, A^c\}$, en fonction de n et de k ?
c. Montrer que si la partition $\mathscr{A}$ possède une classe A non réduite à un singleton l'entropie de $\mathscr{A}$ n'est pas maximale. En déduire la partition de E d'entropie maximale.
d. Supposons qu'une expérience de laboratoire permette de déterminer à quelle partie $A \in \mathscr{A}$ un certaine quantité physique $x \in E$ appartient. Expliquer en une phrase pourquoi l'entropie $H(\mathscr{A})$ mesure la qualité du dispositif expérimental.

Correction.
a. Soit $\mathscr{A}$ une partition de E d'entropie nulle. Une partie $A \in \mathscr{A}$ n'est pas vide, donc sa mesure de comptage n'est pas nulle. Dans la définition de l'entropie, tous les termes de la somme ont même signe, donc sont tous individuellement nuls : pour toute partie $A \in \mathscr{A}$, on a $\mu(A)\ln\mu(A) = 0$, et donc $\mu(A) = 1$. Donc A est l'ensemble E tout entier. L'unique partition d'entropie nulle est donc la partition grossière $\{E\}$.
b. En appliquant la définition de l'entropie on obtient

$$\begin{aligned} H(\{A, A^c\}) &= -\mu(A)\ln\mu(A) - \mu(A^c)\ln\mu(A^c) \\ &= -\frac{1}{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right)^n\left(1-\frac{k}{n}\right)^n. \end{aligned}$$

c. Soit $A \in \mathscr{A}$ une partie de cardinal k tel que $2 \leq k \leq n$. Un simple calcul permet de vérifier que

$$-\frac{k}{n}\ln\frac{k}{n} < -\frac{k-1}{n}\ln\frac{k-1}{n} - \frac{1}{n}\ln\frac{1}{n} \ ;$$

donc si x est un élément de A on a

$$-\mu(A)\ln\mu(A) < -\mu(A\setminus\{x\})\ln\mu(A\setminus\{x\}) - \mu(\{x\})\ln\mu(\{x\}).$$

Donc l'entropie de la partition obtenue à partir de $\mathscr{A}$ en subdivisant A en $A\setminus\{x\}$ et $\{x\}$ est supérieure à l'entropie de $\mathscr{A}$.

Donc la partition d'entropie maximale est la partition de E en singletons et son entropie vaut $\ln n$.

d. D'après la question précédente, l'entropie $H(\mathscr{A})$ d'une partition $\mathscr{A}$ est d'autant plus élevée que les parties $A\in\mathscr{A}$ sont petites ; donc H croît avec la sensibilité de l'appareil de mesure.

18. Pourquoi la tribu borélienne ? Nous allons montrer que la mesure de Lebesgue ne se prolonge pas en une mesure sur $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ qui soit invariante par translations. Ce fait justifie qu'en Théorie de la mesure on s'intéresse à une classe plus petite de parties de $\mathbb{R}$, par exemple à la tribu borélienne de $\mathscr{B}(\mathbb{R})$.

a. Montrer que l'application μ, longueur des intervalles, ne se prolonge pas en une mesure sur $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ invariante par translation. Indication : Soit R la relation d'équivalence sur $I=[0,1]$ qui identifie deux nombres réels dont la différence est un nombre rationnel. Soit A un système de représentants de R, c'est-à-dire une partie de I qui contienne un et un seul point de chaque classe d'équivalence ; l'existence d'une telle partie repose sur l'axiome du choix non dénombrable. On pourra raisonner par l'absurde et déterminer la mesure de A.

b. Déduire de ce qui précède que $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ est strictement inclus dans $\mathscr{P}(\mathbb{R})$.

Correction.

a. Supposons par l'absurde que μ se prolonge en une mesure sur $(\mathbb{R},\mathscr{P}(\mathbb{R}))$ invariante par les translations. Par définition de A, pour tout réel $x\in I$ il existe un unique $a\in A$ et un unique $r\in\mathbb{Q}$ tels que $x=a+r$. Donc

$$I\subset\cup_{r\in\mathbb{Q}}(A+r),\quad A+r=\{a+r,a\in A\}.$$

On a

$$\begin{aligned}\mu(I) &\leq \mu\left(\cup_{r\in\mathbb{Q}}(A+r)\right)\quad\text{(croissance)}=\sum_{r\in\mathbb{Q}}\mu(A+r)\quad(\sigma\text{-additivité})\\ &= \sum_{r\in\mathbb{Q}}\mu(A)\quad\text{(invariance par translation)}\\ &= \begin{cases}0 & \text{si } \mu(A)=0\\ \infty & \text{si } \mu(A)>0,\end{cases}\end{aligned}$$

Comme $\mu(I)=1$, la seule possibilité est que $\mu(A)$ soit strictement positive.

Comme A est l'union de $A_0=A\cap[0,1/2]$ et de $A_1=A\cap[1/2,1]$, nécessairement parmi A_0 et A_1 il existe une partie de mesure strictement positive. Supposons par exemple que l'on a $\mu(A_0)>0$ (l'autre cas étant analogue). On a

$$\cup_{r\in\mathbb{Q}\cap[0,1/2]}(A_0+r)\subset I,$$

et cette union est disjointe d'après la définition de A. Donc, par les mêmes arguments que ci-dessus on a

$$\mu(I)\geq\sum_{r\in\mathbb{Q}\cap[0,1/2]}\mu(A_0+r)=\sum_{r\in\mathbb{Q}\cap[0,1/2]}\mu(A_0)=+\infty,$$

ce qui est absurde puisque $\mu(I) = 1$.

b. Si A était borélien, le même raisonnement avec la mesure de Lebesgue conduirait à une absurdité analogue. Donc A est un exemple de partie non borélienne de $\mathbb{R}$.

20. Une mesure diffuse purement atomique. Soit E un ensemble dont le cardinal est strictement supérieur au dénombrable. Soit $\mathscr{E}$ la tribu engendrée par l'ensemble des singletons de E, c'est-à-dire la classe des ensembles au plus dénombrables ou de complémentaire au plus dénombrable. Posons enfin, pour $A \in \mathscr{E}$, $\mu(A) = 0$ si A est au plus dénombrable et $\mu(A) = 1$ si A^c est au plus dénombrable.

a. Dans le cas particulier où E est l'ensemble $\mathbb{R}$, donner un exemple de partie qui ne soit pas dans la tribu $\mathscr{E}$.

b. Montrer que μ est une mesure de probabilité (c'est-à-dire une mesure (positive) telle que $\mu(E) = 1$).

c. Vérifier que μ est *diffuse*, c'est-à-dire que pour tout $x \in E$ on a $\mu(\{x\}) = 0$.

d. Déterminer les *atomes* de μ, c'est-à-dire les parties $A \in \mathscr{E}$ de mesure strictement positive et telles que pour toute partie $B \in \mathscr{E}$ incluse dans A on a $\mu(B) = 0$ ou $\mu(A \setminus B) = 0$. En déduire que μ est *purement atomique*, c'est-à-dire que E est l'union d'atomes de μ.

Correction.

a. Dans le cas où $E = \mathbb{R}$, l'intervalle $[0, +\infty[$ n'est pas dans $\mathscr{E}$ parce que ni lui ni son complémentaire $]-\infty, 0[$ ne sont au plus dénombrables.

b. Parmi les axiomes qui définissent une mesure de probabilité, seule la σ-additivité de μ n'est pas immédiate. Soit $\{A_j\}_{j\in J}$ une famille au plus dénombrable de parties $A_j \in \mathscr{E}$ deux à deux disjointes.

Si pour tout indice $j \in J$ la partie A_j est dénombrable, alors $\cup_j A_j$ elle-même est dénombrable et l'on a bien

$$\mu(\cup_j A_j) = \sum_j \mu(A_j) = 0.$$

Sinon, il existe $j \in J$ tel que A_j soit non dénombrable. Or les A_k sont deux à deux distinctes et ${A_j}^c$ est au plus dénombrable. Donc $\cup_{k\neq j} A_k \subset {A_j}^c$ est au plus dénombrable. Donc $\mu(A_j) = 1$ et, pour tout indice $k \neq j$ de J, $\mu(A_k) = 0$. Dans ce cas on a bien

$$\mu(\cup_j A_j) = 1 = \mu(A_j) + \sum_{k\neq j} \mu(A_k).$$

c. Un singleton étant en particulier une partie finie de E, sa mesure est nulle. Donc μ est difffuse.

d. Si $A \in \mathscr{E}$ est un atome de μ, on doit avoir $\mu(A) > 0$, donc A est ni finie ni dénombrable.

Réciproqument, considérons une telle partie A de $\mathscr{E}$. Soit $B \in \mathscr{E}$ une partie incluse dans A. Si B est au plus dénombrable, $\mu(B) = 0$. Sinon B^c est au plus dénomrable et $\mu(A \setminus B) = \mu(A \cap B^c) \leq \mu(B^c) = 0$. Donc A est un atome.

Les atomes de μ sont donc les parties $A \in \mathscr{E}$ de complémentaire au plus dénombrable.

En particulier, E lui-même est un atome, propriété qui fait de μ une mesure purement atomique.

24. L'ensemble de Cantor *. K est l'ensemble des réels x appartenant à l'intervalle $[0,1[$ et dont l'écriture en base 3 ne contient pas le chiffre 1. Ainsi, si pour tout élément $x \in [0,1[$ on note $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite telle que

$$x = \sum_{n\geq 1} \frac{x_n}{3^n}, \quad x_n \in \{0,1,2\},$$

on a

$$K = \{x \in [0,1[,\ \forall n \geq 1\ x_n \neq 1\}.$$

(La suite (x_n) est un *développement triadique* de x. Ce développement n'est pas unique pour les nombres triadiques, analogues en base trois des nombres décimaux. Mais cette ambiguité dans la définition précédente de K, qui ne concerne qu'un ensemble dénombrable de nombres réels, n'est pas génante pour le calcul de la mesure de K.)

a. Rappeler pourquoi une partie dénombrable de $\mathbb{R}$ est borélienne et de mesure de Lebesgue nulle.

b. Montrer que malheureusement K n'est pas dénombrable. On pourra utiliser l'application de K dans $[0,1[$ qui a x associe le réel $\sum_1^\infty y_k/2^k$, où $y_k = x_k/2$, et remarquer qu'elle est surjective.

Pour $l \geq 1$, notons

$$A_l = \{x \in [0,1[,\ \exists k \in \{1,...,l\}\ x_k = 1\}.$$

c. Vérifier que $K = [0,1[\backslash(\cup_l A_l)$ et en déduire que K est borélien.

d. Dessiner A_1 et A_2.

e. En utilisant l'additivité de la mesure de Lebesgue λ, montrer que

$$\lambda(A_l) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^l.$$

f. En utilisant la σ-additivité de λ, en déduire que $\lambda(K) = 0$.

g. Montrer que la mesure de Lebesgue d'un ouvert non vide de $\mathbb{R}$ est strictement positive et en déduire que K est d'intérieur vide.

Correction. Précision : L'écriture en base 3 d'un nombre $x \in [0,1[$ n'est pas toujours unique. En effet, les nombres triadiques, c'est-à-dire les analogues des nombres décimaux en base 10, qui admettent un développement n'ayant plus que des 0 à partir d'un certain rang, ont automatiquement deux développements ; par exemple, $0,1000... = 0,1$ s'écrit aussi $0,0222... = 0,0\bar{2}$. Les autres nombres ont un développement unique.

Dans la définition habituelle de K, il faut supposer qu'en cas d'ambiguïté on s'interdise de conserver un 1 suivi d'une infinité de 0 ou suivi d'une infinité de 2. Autrement dit, au lieu de $x = 0,1$ on écrira $x = 0,00222...$ et au lieu de $x = 0,01222...$ on écrira $x = 0,02$.

Comme l'emsemble des nombres n'ayant pas un unique développement en base 3 est dénombrable et donc de mesure de Lebesgue nulle (cf. la première question ci-dessous), le résultat de l'exercice ne dépend pas de la convention choisie.

a. Une partie dénombrable de $\mathbb{R}$ est l'union dénombrable de ses singletons, qui sont boréliens et de mesure de Lebesgue nulle. Elle est donc elle-même borélienne et, d'après la propriété de σ-additivité de la mesure de Lebesgue, de mesure nulle.

b. L'application f de K dans $[0,1[$

$$x = \sum_{k\geq 1} \frac{x_k}{3^k} \longmapsto y = \sum_{k\geq 1} \frac{x_k/2}{2^k}$$

est surjective (éventuellement à un ensemble dénombrable près) parce que tout réel $y \in [0,1[$ admet un développement en base 2, $\sum_{k\geq 1} \frac{y_k}{2^k}$, avec $y_k \in \{0,1\}$, et est donc l'image par f de l'élément

$$x = \sum_{k\geq 1} \frac{2y_k}{3^k}$$

de K. Comme $[0,1[$ n'est pas dénombrable, K ne l'est pas non plus.

c. Pour tout $x \in [0,1[$ on a

$$\begin{aligned} x \notin K \quad &\Longleftrightarrow \quad \exists l \geq 1 \quad x_l = 1 \\ &\Longleftrightarrow \quad \exists l \geq 1 \quad x \in A_l. \end{aligned}$$

Donc $K = [0,1[\setminus(\cup_l A_l)$.

Pour $k \geq 1$, l'ensemble

$$\begin{aligned} B_k &= \{x \in [0,1[,\ x_k = 1\} \\ &= \{0, x_1 x_2 ... x_{k-1} 1 x_{k+1} ...,\ \forall i \in \mathbb{N}_* \setminus \{k\} \quad x_i \in \{0,1,2\}\} \end{aligned}$$

est l'union de 2^{k-1} intervalles

$$\{0, x_1^o x_2^o ... x_{k-1}^o 1 x_{k+1} ..., \quad \forall i \geq k+1\ x_i \in \{0,1,2\}\}$$

de longueur 3^{-k}. Donc B_k est borélien, de même que

$$A_l = \bigcup_{k=1}^{l} B_k \quad \text{et} \quad K = \left(\bigcup_{l\geq 1} A_l\right)^c.$$

d. Compte-tenu de la précision donnée au début de l'exercice, on a

$$A_1 = B_1 = \{0,1x_2..., \text{ les } x_j \text{ sont non tous nuls ni tous égaux à } 2\},$$

c'est-à-dire

$$A_1 =]0,1000...; 0,1222...[=]0,1; 0,2[= \left]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right[,$$

les écritures avec virgule étant tacitement en base 3. Une autre convention pour le développement retenu en base 3 conduirait simplement à ce que ces intervalles soient fermés ou semi-fermés. De même,

$$A_2 =]0,01; 0,02[\cup]0,1; 0,2[\cup]0,11; 0,12[= \left]\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right[\cup \left]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right[\cup \left]\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right[.$$

e. D'après la propriété d'additivité finie de la mesure de Lebesgue, les ensembles B_k ont pour longueur $\lambda(B_k) = 2^{k-1}/3^k$ et les A_l,

$$\lambda(A_l) = \sum_{k=1}^{l} \frac{2^{k-1}}{3^k} = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^l .$$

f. La σ-additivité de la mesure de Lebesgue implique que l'on a

$$\lambda(\cup_l A_l) = \lambda(\lim_l \uparrow A_l) = \lim_l \uparrow \lambda(A_l) = \lim_l 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^l = 1.$$

Donc $\lambda(K) = \lambda([0,1[) - \lambda(\cup_l A_l) = 0$.

g. Un ouvert non vide de $\mathbb{R}$ est une union non vide d'intervalles ouverts non vides ; il contient au moins un intervalle de la forme $]a,b[$ avec $a < b$, donc sa mesure est minorée par $\lambda(]a,b[) = b - a > 0$. Donc la mesure de Lebesgue charge les ouverts.

Or K est de mesure de Lebesgue nulle. Donc il ne contient aucun intervalle ; c'est dire qu'il est d'intérieur vide. (Un ensemble, tel que K, dont les composantes connexes sont des singletons est qualifié de *totalement discontinu*.)

CHAPITRE 2

L'intégration par rapport à une mesure

Sommaire

1. Exemples élémentaires.

a. La somme de deux fonctions intégrables est-elle intégrable ?
b. Le carré d'une fonction intégrable est-il intégrable ? Une fonction de carré intégrable est-elle elle-même intégrable ?
c. La composée de deux fonctions intégrables est-elle intégrable ?
d. Soit μ une mesure sur un expace mesurable $(E, \mathscr{E})$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables positives qui converge simplement vers f. On suppose qu'il existe une constante K telle que $\int f_n \, d\mu \leq K$ pour tout entier n. Montrer que

$$\int f \, d\mu \leq K.$$

Correction.
a. L'espace $\mathscr{L}^1(E, \mathscr{E}, \mu)$ des fonctions réelles intégrables sur μ est un espace vectoriel. En particulier, la somme de deux fonctions réelles intégrables est intégrable. On peut aussi redémontrer ce résultat de façon élémentaire, d'ailleurs en le généralisant au cas des fonctions éventuellement infinies.

Soient donc f et g deux fonctions intégrables. D'après l'inégalité triangulaire on a $|f + g| \leq |f| + |g|$. Par croissance de l'intégrale des fonctions mesurables positives on a

$$\int_E |f + g| \, d\mu \leq \int_E |f| \, d\mu + \int_E |g| \, d\mu < \infty.$$

Donc $f + g$ est intégrable.
b. Une fonction intégrable n'est pas forcément de carré intégrable. Par exemple, la fonction $x \mapsto 1/x$ est intégrable sur $]0, 1]$ par rapport à la mesure $x \, dx$ (et son intégrale vaut 1), tandis que l'intégrale de son carré par rapport à la même mesure est infinie.

Réciproquement, une fonction de carré intégrable n'est pas forcément elle-même intégrable. La fonction $x \mapsto 1/x$ en donne un exemple sur $]0, +\infty[$.

c. La composée de deux fonctions intégrables n'a aucune raison, en général, d'être intégrable. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction constante égale à zéro et si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction qui vaut 1 en zéro et zéro partout ailleurs, alors f et g sont intégrables alors que $g \circ f$, qui est constante et égale à 1, n'est pas intégrable.
d. La convergence simple de la suite (f_n) vers f implique que $f = \liminf_n f_n$. Le lemme de Fatou donne alors

$$\int f\,d\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int f_n\,d\mu \leq K.$$

2. Un exemple bête. Calculer l'intégrale de Lebesgue de la fonction

$$\begin{array}{rccl} f: & [-2,2] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 1-|x| \end{array}$$

par rapport à la mesure de Lebesgue de $[-2,2]$, en n'utilisant que les définitions et le théorème de Beppo-Levi (convergence monotone).

Correction. On veut calculer

$$\int_{[-2,2]} (1-|x|)\,dx,$$

où dx désigne la mesure obtenue en restreignant la mesure de Lebesgue aux boréliens de $\mathbb{R}$ contenus dans $[-2,2]$. La fonction $f : ([-2,2], \mathscr{B}([-2,2])) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R})), x \mapsto 1-|x|$ est mesurable parce qu'elle est continue.

Les parties positive et négative de f sont les deux fonctions f^+ et f^- définies par $f^+(x) = \max(0, 1-|x|)$ et $f^-(x) = \max(0, |x|-1)$ sur $[-2,2]$. Alors l'égalité $f = f^+ - f^-$ est vérifiée. Plus explicitement,

$$f^+(x) = \begin{cases} 1-|x| & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{si } 1 < |x| \leq 2 \end{cases}$$

et

$$f^-(x) = \begin{cases} |x|-1 & \text{si } 1 < |x| \leq 2 \\ 0 & \text{si } |x| \leq 1. \end{cases}$$

(Remarquons que contrairement à ce que son nom pourrait sembler indiquer, la partie négative de f est une fonction positive.) Les parties positive et négative de f sont mesurables et positives, donc possèdent une intégrale.

Calculons d'abord l'intégrale de la partie positive f^+. Comme f^+ prend ses valeurs dans l'intervalle $[0,1]$, pour tout $n \in \mathbb{N}_*$ posons (mais il y aurait beaucoup d'autres choix possibles)

$$f_n^+(x) = \begin{cases} \dfrac{k}{2^n} & \text{si } \dfrac{k}{2^n} \leq f^+(x) < \dfrac{k+1}{2^n}, \text{avec } k \in \{0, ..., 2^n-1\} \\ 1 & \text{si } f^+(x) = 1\ ; \end{cases}$$

ceci définit bien une fonction f_n^+ sur l'intervalle $[-2,2]$ parce que

$$(f^+)^{-1}\left(\bigcup_{k\in\{0,\dots,2^n-1\}} \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right[\cup \{1\}\right) = (f^+)^{-1}([0,1]) = [-2,2].$$

Autrement dit on a

$$f_n^+ = \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{k}{2^n} \mathbb{1}_{\{k/2^n \leq f^+(x) < (k+1)/2^n\}} + \mathbb{1}_{\{f^+(x)=1\}}.$$

La fonction f_n^+ est mesurable (f^+ est mesurable, donc f_n^+ est une combinaison linéaire de fonctions indicatrices de boréliens de $\mathbb{R}$), étagée (cette combinaison linéaire est finie) et positive.

D'autre part, la suite $(f_n^+)_{n\in\mathbb{N}_*}$ est croissante. En effet, soit $x \in [-2,2]$. Si $f^+(x) = 1$, la suite $(f_n^+(x))$ est constante. Sinon, pour tout $n \in \mathbb{N}_*$, il existe un unique $k \in \{0, ..., 2^n - 1\}$ tel que $f^+(x)$ soit dans l'intervalle

$$\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right[= \left[\frac{2k}{2^{n+1}}, \frac{2k+1}{2^{n+1}}\right[\cup \left[\frac{2k+1}{2^{n+1}}, \frac{2k+2}{2^{n+1}}\right[\ ;$$

si $f^+(x)$ est dans le premier des deux sous-intervalles du membre de droite on a $f_{n+1}^+(x) = f_n^+(x)$ et sinon $f^+(x)$ est dans le second sous-intervalles et alors $f_{n+1}^+(x) = f_n^+(x) + 1/2^n > f_n^+(x)$.

Enfin, la suite (f_n^+) converge simplement vers f^+ parce que pour tout $x \in [-2,2]$ on a

$$f^+(x) - \frac{1}{2^n} < f_n^+(x) \le f^+(x) \quad (\forall n \ge 1) \ ;$$

donc $\lim_n f_n^+(x) = f^+(x)$.

On a vu que

$$f_n^+ = \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{k}{2^n} \mathbb{1}_{\{k/2^n \le f^+(x) < (k+1)/2^n\}} + \mathbb{1}_{\{f^+(x)=1\}}.$$

Cette écriture est la décomposition canonique de f_n^+ parce que f_n^+ prend effectivement les valeurs $0, 1/2^n, ..., 1 - 1/2^n$ et 1, qui sont distinctes deux à deux. Donc, par définition l'intégrale de f_n^+ vaut

$$\int_{[-2,2]} f_n^+ \, dx = \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{k}{2^n} \mu\left(\left\{\frac{k}{2^n} \le f^+(x) < \frac{k+1}{2^n}\right\}\right) + \mu(\{f^+(x) = 1\}).$$

Remarquons d'abord que la partie $\{f^+(x) = 1\} = \{0\}$ est un singleton, et est donc de mesure de Lebesgue nulle. Par ailleurs, pour tout $x \in [-2,2]$ on a

$$\begin{aligned}
\frac{k}{2^n} \le f^+(x) = 1 - |x| < \frac{k+1}{2^n} \quad &\Leftrightarrow \quad 1 - \frac{k+1}{2^n} < |x| \le 1 - \frac{k}{2^n} \\
&\Leftrightarrow \quad 1 - \frac{k+1}{2^n} < x \le 1 - \frac{k}{2^n} \\
&\qquad \text{ou } -\left(1 - \frac{k}{2^n}\right) \le x < -\left(1 - \frac{k+1}{2^n}\right),
\end{aligned}$$

donc

$$\mu\left(\left\{\frac{k}{2^n} \le f^+(x) < \frac{k+1}{2^n}\right\}\right) = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Donc

$$\int_{[-2,2]} f_n^+ \, dx = \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{k}{2^n} \frac{1}{2^{n-1}} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

(À ce stade le calcul coïncide à nouveau avec celui que l'on ferait pour calculer l'intégrale de Riemann de f^+, c'est-à-dire en prenant une subdivision de l'ensemble source de f_n^+ et non pas de son ensemble but, c'est-à-dire en intégrant la fonction étagée f_n^+ vue comme une fonction en escalier :

$$f_n^+ = \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{k}{2^n} \mathbb{1}_{\{1-(k+1)/2^n < |x| \le 1-k/2^n\}} + \mathbb{1}_{\{0\}}.)$$

Par définition, l'intégrale de f^+ satisfait

$$\int_{[-2,2]} f^+ \, dx = \sup\left\{\int_{[-2,2]} g \, dx, \ g \text{ étagée positive}, g \le f\right\} \ge 1 - \frac{1}{2^n}.$$

À la limite quand n tend vers $+\infty$, on voit que $\int_{[-2,2]} f^+ \, dx \ge 1$. Pour conclure à l'égalité en n'utilisant strictement que les définitions, il faudrait calculer toutes les intégrales $\int_{[-2,2]} g \, dx$ de fonctions étagées positives telles que $g \le f$. Le théorème de Beppo-Levi (convergence monotone) affirme ici que comme la suite (f_n^+) est croissante et tend vers f^+ l'intégrale de f^+ *égale* la limite des intégrales des f_n^+ : $\int_{[-2,2]} f^+ \, dx = 1$.

Comme cette intégrale est finie, f possède une intégrale : si $\int_{[-2,2]} f^- \, dx$ s'avère être finie, $\int_{[-2,2]} f \, dx$ est finie et vaut $\int_{[-2,2]} f^+ \, dx - \int_{[-2,2]} f^- \, dx$, et f est intégrable ; si au contraire $\int_{[-2,2]} f^- \, dx = +\infty$, on pose $\int_{[-2,2]} f \, dx = -\infty$ et f est dite non-intégrable.

Un calcul analogue montre que $\int_{[-2,2]} f^- \, dx = -1$. (Ce résultat s'obtient aussi avec l'intégrale de Riemann de f^-.) Donc f est intégrable et son intégrale vaut

$$\int_{[-1,1]} f \, dx = \int_{[-1,1]} f^+ \, dx - \int_{[-1,1]} f^- \, dx = 0.$$

Si nous avions simplement été interessé dans le fait de savoir si f est intégrable, indépendamment de la valeur de son intégrale, il aurait été suffisant de calculer un seule intégrale, en l'occurence celle de la fonction positive $|f| = f^+ + f^-$ et de constater que sa valeur 2 est finie.

3. Inégalité de Fatou stricte. Notons λ la mesure de Lebesgue de l'intervalle $[-1,1]$. Soit g la fonction définie sur $[-1,1]$ par $g(x) = 1$ si $x \in [0,1]$ et $g(x) = 0$ sinon. Soit encore $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définie par $f_n(x) = g(x)$ si n est pair et $f_n(x) = g(-x)$ si n est impair. Montrer que

$$\int \left(\liminf_{n\to+\infty} f_n \right) d\lambda < \liminf_{n\to+\infty} \int f_n \, d\lambda.$$

Correction. Comme $\liminf_n f_n$ est la fonction indicatrice de $\{0\}$, on a

$$\int \left(\liminf_{n\to+\infty} f_n \right) d\lambda = \int \mathbb{1}_{\{0\}} \, d\lambda = \lambda(\{0\}) = 0.$$

D'autre part, $\int f_{2n} \, d\lambda = \lambda([0,1]) = 1$ et $\int f_{2n+1} \, d\lambda = \lambda([-1,0]) = 1$, donc

$$\liminf \int f_n \, d\lambda = 1.$$

L'inégalité recherchée en découle.

4. Un critère d'intégrabilité. Soit $(E, \mathscr{E}, \mu)$ un espace mesuré. Pour toute fonction mesurable réelle f sur E on note ϕ_f la fonction

$$\phi_f : t \in \mathbb{R}^+ \mapsto \mu\left(\{f > t\}\right).$$

a. Montrer, si f étagée positive, que ϕ_f est mesurable, étagée et positive et que la formule suivante est satisfaite :

$$\int_{\mathbb{R}^+} \phi_f(t) \, dt = \int_E f \, d\mu. \tag{1}$$

b. L'identité précédente est-elle vraie dans le cas d'une fonction mesurable positive quelconque ?

c. Est-elle vraie dans le cas d'une fonction intégrable quelconque ?

d. Montrer que pour toute fonction mesurable sur E à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et pour tout $p \in]0,\infty[$ on a

$$\int_E f^p \, d\mu = p \int_{\mathbb{R}^+} \mu(\{f > s\}) s^{p-1} \, ds.$$

Soit $\|\cdot\|$ une norme mesurable sur $(\mathbb{R}^d, \mathscr{R}^d)$ $(d \geq 1)$ telle que la mesure de Lebesgue de la boule unité

$$B^d = \{x \in \mathbb{R}^d;\ \|x\| < 1\}$$

soit finie ; rappelons en particulier que $\|\cdot\| : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^+$ est une fonction homogène, c'est-à-dire telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et pour tout $\rho \in \mathbb{R}$ on a $\|\rho x\| = |\rho|\, \|x\|$.

e. Utiliser ce qui précède pour trouver la condition sur les entiers $d \geq 1$ et $p \geq 1$ pour que la fonction

$$f : x \mapsto \frac{1}{\|x\|^p}$$

soit intégrable sur B^d par rapport à la mesure de Lebesgue.

Correction.

a. Soit $f : E \to \mathbb{R}_+$ mesurable étagée. Notons $t_1, ..., t_n \geq 0$ les valeurs prises par f :

$$f = \sum_{1 \leq j \leq n} t_j \mathbb{1}_{f = t_j}$$

et

$$\int_E f \, d\mu = \sum_{1 \leq j \leq n} t_j \mu f = t_j.$$

Maintenant, pour tout $t \geq 0$ on a

$$\mu(\{f > t\}) = \begin{cases} \mu(E) & \text{si } t < t_1 \\ \sum_{k < j \leq n} \mu(\{f = t_j\}) & \text{si } t_k \leq t < t_{k+1} \ (\forall k \in \{1, ..., n-1\}) \\ 0 & \text{si } t_n \leq t. \end{cases}$$

Cette fonction de t est constante sur les intervalles $[0, t_1[$ et $[t_k, t_{k+1}[$ $(k = 1, ..., n-1)$, et nulle sur $[t_n, +\infty[$; ces intervalles formant une subdivision finie de $\mathbb{R}^+$, cette fonction est en escalier. Donc son intégrale vaut

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^+} \mu(\{f > t\}) \, dt &= \mu(E) t_1 + \sum_{1 \leq k < n-1} \left(\sum_{k < j \leq n} \mu(\{f = t_j\}) \right) (t_{k+1} - t_k) \\ &= \mu(E) t_1 + \sum_{1 < j \leq n} \sum_{1 < k \leq j} (t_k - t_{k-1}) \mu(\{f = t_j\}) \\ &= \mu(E) t_1 + \sum_{1 < j \leq n} (t_j - t_1) \mu(\{f = t_j\}) \\ &= \sum_{1 \leq j \leq n} t_j \mu(\{f = t_j\}) \\ &= \int_E f \, d\mu. \end{aligned}$$

b. Si f est une fonction mesurable positive, il existe une suite croissante $(f_n)_n$ de fonctions étagées positives qui converge simplement vers f. D'après la question précédente, pour tout n on a

$$\int_{\mathbb{R}^+} \mu(\{f_n > t\})\, dt = \int_E f_n \, d\mu.$$

D'après le Théorème de convergence monotone, le membre de droite tend vers $\int_E f\, d\mu$ et l'on a $\mu(\{f_n > t\}) \to_n \mu(\{f > t\})$; par suite le Théorème de convergence monotone montre que le membre de gauche tend vers $\int_{\mathbb{R}^+} \mu(\{f > t\})\, dt$.

Donc l'identtité de la question précédente reste vraie pour les fonctions mesurables positives quelconques.

c. Cette identité ne peut pas être vraie pour les fonctions intégrables de signe quelconque, par exemple parce que $\int_{\mathbb{R}^+} \mu(\{f > t\})\, dt$ est un nombre positif, alors qu'il existe bien sûr des fonctions dont l'intégrale est strictement négative.

d. D'après ce qui précède appliqué à la fonction f^p on a

$$\int_E f^p \, d\mu = \int_{\mathbb{R}^+} \mu(\{f^p > t\})\, dt = \int_{\mathbb{R}^+} \mu(\{f > t^{1/p}\})\, dt.$$

La formule cherchée se déduit du changement de variable $t = s^p$, qui se montre directement (si l'on ne dispose pas de la formule du changement de variable qui sera démontrée ultérieurement dans le Cours) en passant par les fonctions étagées (pour lesquelles la fonction à intégrer est en escalier), comme dans les deux premières questions de l'énoncé. Finalement on a

$$\int_E f^p \, d\mu = p \int_{\mathbb{R}^+} \mu(\{f > s\}) s^{p-1}\, ds.$$

e. D'après la question précédente on a

$$\int_{B^d} \frac{\lambda(dx)}{\|x\|^p} = \int_{\mathbb{R}^+} p t^{p-1} \lambda\left(\left\{\frac{1}{\|x\|} > t\right\}\right) dt,$$

où

$$\lambda\left(\left\{\frac{1}{\|x\|} > t\right\}\right) = B^d \cap \frac{1}{t} B^d.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\int_{B^d} \frac{\lambda(dx)}{\|x\|^p} &= p \int_{\mathbb{R}^+} t^{p-1} \lambda\left(B^d \cap \frac{1}{t} B^d\right) dt \\
&= p \left(\int_{[0,1]} t^{p-1}\, dt + \int_{[1,+\infty[} t^{p-d-1}\, dt \right) \lambda(B^d).
\end{aligned}$$

Cette quantité est finie si et seulement si $1 - p < 1$ et $1 + d - p > 1$, c'est-à-dire si et seulement si $d > p$.

5. Une application du théorème de convergence monotone.

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Déterminer la limite de

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{f(t)^2 + 1/n}}.$$

Correction. Pour tous $n \geq 1$ et $x \in [0,1]$, notons

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{f(x)^2 + 1/n}}.$$

La suite (f_n) est croissante positive et converge simplement vers

$$\phi : x \in [0,1] \mapsto \begin{cases} 1/|f(x)| & \text{si } f(x) \neq 0 \\ 1/0 = +\infty & \text{si } f(x) = 0. \end{cases}$$

D'après le théorème de convergence monotone, on a donc

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx \to \int_0^1 \frac{dx}{|f(x)|} \in [0,+\infty]$$

quand n tend vers $+\infty$.

6. Une application du théorème de convergence dominée. Soient a et b deux réels tels que $a<b$, et $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction borélienne bornée intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue et telle que $\lim_{x\to a^+} f(x)=\gamma\in\mathbb{R}$. Montrer que pour tout $t\in]a,b[$ la fonction $x\mapsto f(x)/\sqrt{(x-a)(t-x)}$ est intégrable sur $]a,t[$, puis calculer

$$\lim_{t\to a^+}\int_{]a,t[}\frac{f(x)}{\sqrt{(x-a)(t-x)}}\,dx.$$

Correction. Soit $t\in]a,b[$. La fonction $x\mapsto \frac{f(x)}{\sqrt{(x-a)(t-x)}}$ est borélienne sur $]a,t[$.

Soit M un réel tel que $|f|\le M$ sur $]a,b[$. L'intégrale de Riemann (généralisée) $\int_a^t \frac{1}{\sqrt{(x-a)(t-x)}}\,dx$ étant absolument convergente, on en déduit que $x\mapsto\frac{1}{\sqrt{(x-a)(t-x)}}$ est intégrable sur $]a,t[$. Or, $|\frac{f(x)}{\sqrt{(x-a)(t-x)}}|\le\frac{M}{\sqrt{(x-a)(t-x)}}$, donc $x\mapsto\frac{f(x)}{\sqrt{(x-a)(t-x)}}$ est intégrable sur $]a,t[$.

Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $]a,b[$ telle que $t_n\to a^+$. Pour chaque $n\ge 1$, en faisant le changement de variable $x\mapsto a+(t_n-a)x$, on a

$$\int_{]a,t_n[}\frac{f(x)}{\sqrt{(x-a)(t_n-x)}}\,dx=\int_{]0,1[} g_n(x)\,dx,$$

où $g_n(x)=\frac{f(a+(t_n-a)x)}{\sqrt{x(1-x)}}$. La suite $(g_n)_n$ converge simplement vers $\frac{\gamma}{\sqrt{x(1-x)}}$ sur $]0,1[$ et satisfait l'estimation $|g_n(x)|\le M/\sqrt{x(1-x)}$. D'après le théorème de convergence dominée, on obtient :

$$\int_{]a,t_n[}\frac{f(x)}{\sqrt{(x-a)(t_n-x)}}\,dx\to\int_{]0,1[}\frac{\gamma}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx=\gamma\pi.$$

La suite $(t_n)_n$ étant quelconque, on en déduit que

$$\lim_{t\to a^+}\int_{]a,t[}\frac{f(x)}{\sqrt{(x-a)(t_n-x)}}\,dx=\gamma\pi.$$

7. Intégration par rapport à une mesure image. Soient $f:(E,\mathscr{E})\to(F,\mathscr{F})$ une application mesurable et μ une mesure bornée sur $(E,\mathscr{E})$. Notons $f_*\mu$ la mesure image de μ par f, c'est-à-dire la mesure de $(F,\mathscr{F})$ définie par

$$f_*\mu(B)=\mu(f^{-1}(B))$$

pour toute partie $B\in\mathscr{F}$.

a. Montrer qu'une fonction $\phi : F \to \mathbb{R}$ $\mathscr{F}$-mesurable est $f_*\mu$-intégrable si et seulement si $\phi \circ f$ est μ-intégrable et que dans ce cas les deux intégrales coïncident :

$$\int_E \phi \circ f \, d\mu = \int_F \phi \, d(f_*\mu) \ ;$$

cette égalité fondamentale est la *formule d'intégration par rapport à une mesure image*. Dans le cas particulier où f est un difféomorphisme entre deux ouverts de $\mathbb{R}^n$, la mesure image $f_*\mu$ peut être explicitée en fonction du déterminant de la différentielle de f, et la formule devient alors la *formule du changement de variable*, qui sera démontrée ultérieurement dans le Cours.

Considérons dorénavant le cas particulier où $(F, \mathscr{F}) = (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ et où ϕ est la fonction identité de $\mathbb{R}$.[1]

b. Écrire l'égalité de la question précédente dans ce cas.

c. Trouver dans la vie courante un exemple d'espace mesurable $(E, \mathscr{E})$ (différent de $\mathbb{R}$ lui-même) et de variable aléatoire f pour chacune des deux mesures images suivantes :

– loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}$ et $\rho \in [0,1]$:

$$f_*\mu = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \rho^k (1-\rho)^{n-k} \delta_k \quad (\text{où } \delta_k \text{ est la mesure de Dirac en } k).$$

– loi uniforme sur une partie A de $\mathbb{R}$.

Par exemple, pour la loi binomiale on pourra se référer à un jeu de loto où l'on tire n boules parmi une infinité, ayant deux couleurs possibles dans une proportion de ρ et $1-\rho$.

Correction.

a. Remarquons d'abord que si ϕ est $\mathscr{F}$-mesurable alors $\phi \circ f$ est $\mathscr{E}$-mesurable, parce que f l'est ; mais la réciproque n'est pas vraie.

Soient $\phi^{\pm}$ les parties positives et négatives de ϕ. Elles sont les limites croissantes respectives de deux suites de fonctions étagées positives $(\phi_n^{\pm})_{n\in\mathbb{N}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\phi_n^{\pm}$ prend un nombre fini de valeurs, donc s'écrit comme une combinaison linéaire (finie) de fonctions indicatrices :

$$\phi_n^{\pm} = \sum_{z\in\mathbb{R}} z \mathbb{1}_{\{\phi_n^{\pm} = z\}}.$$

[1] En Théorie des Probabilités, la fonction f s'appelle alors une *variable aléatoire* et la mesure image $f_*\mu$ s'appelle la *loi* de f.

Par définition, l'intégrale de $\phi_n^{\pm}$ relativement à $f_*\mu$ vaut

$$\begin{aligned}
\int_F \phi_n^{\pm}\, d(f_*\mu) &= \sum_{z\in\phi_n^{\pm}(F)} z\,(f_*\mu)(\{\phi_n^{\pm}=z\}) \\
&= \sum_{z\in\phi_n^{\pm}(F)} z\,\mu(\{\phi_n^{\pm}\circ f=z\}) \qquad \text{(par définition de la mesure image)} \\
&= \sum_{z\in\phi_n^{\pm}\circ f(E)} z\,\mu(\{\phi_n^{\pm}\circ f=z\}) \\
&= \int_E \phi_n^{\pm}\circ f\, d\mu\ ;
\end{aligned}$$

la troisième inégalité découle du fait que $\phi_n^{\pm}\circ f(E)\subset\phi_n^{\pm}(F)$ et si $z\in\phi_n^{\pm}(F)\setminus\phi_n^{\pm}\circ f(E)$ alors $\{\phi_n^{\pm}\circ f=z\}=\emptyset$ et donc $\mu(\{\phi_n^{\pm}\circ f=z\})=0$.

La fonction ϕ est $f_*\mu$-intégrable si et seulement si la limite de chacune des deux suites croissantes $(\int_F \phi_n^{\pm}\, d(f_*\mu))_{n\in\mathbb{N}}$ est finie, donc si et seulement si la limite de chacune des deux suites croissantes $(\int_E \phi_n^{\pm}\circ f\, d\mu)_{n\in\mathbb{N}}$ est finie, donc si et seulement si $\phi\circ f$ est μ-intégrable. Dans ce cas, les deux intégrales coïncident.

b. Pour une variable aléatoire, l'égalité devient :

$$\int_E f\, d\mu = \int_{\mathbb{R}} x\, d(f_*\mu).$$

Cette formule ramène le calcul de l'intégrale de la variable aléatoire f sur l'espace abstrait E à celui de l'intégrale de x sur $\mathbb{R}$, relativement à la loi $f_*\mu$ de la variable aléatoire f.

c. – Supposons tirer n boules parmi une infinité de boules ayant deux couleurs possibles. Notons ces couleurs par exemple 0 et 1, et supposons qu'elles soient présentes dans des proportions respectives de $1-\rho$ et de ρ. L'espace E des telles expériences possibles peut être identifié à l'ensemble des n-uplets $x=(x_1,...,x_n)$ de $\{0,1\}\subset\mathbb{R}$.

Le fait qu'il y ait une infinité de boules implique que la proportion des boules d'une couleur donnée n'est pas modifiée après le tirage d'un nombre fini de boules. Sous cette hypothèse, E est donc muni de la mesure de probabilité μ telle que

$$\mu(\{x\}) = \rho^{f(x)}(1-\rho)^{n-f(x)},$$

où $f: E\to\{0,...n\}\subset\mathbb{R}$ est la variable aléatoire définie par $f(x)=\sum_{i=1}^n x_i$.

L'intégrale de f est le nombre moyen de boules de la couleur 1 parmi les n boules tirées. D'après la question précédente, cette intégrale vaut

$$\int_E f\, d\mu = \int_{\mathbb{R}} x\, d(f_*\mu).$$

La loi de f, soit la mesure $f_*\mu$, est déterminée par sa valeur sur les singletons $\{k\}$, $k\in\{0,...,n\}$:

$$f_*\mu(\{k\}) = \mu(\{x\in E,\ f(x)=k\}) = C_n^k\rho^k(1-\rho)^{n-k}.$$

Globalement, elle vaut donc

$$f_*\mu = \sum_{k=0}^n C_n^k\rho^k(1-\rho)^{n-k}\delta_k\ ;$$

c'est la loi binomiale. L'intégrale de f vaut

$$\int_E f\, d\mu = \sum_{k=0}^n k\, C_n^k\, \rho^k(1-\rho)^{n-k}.$$

– Dans un langage de programmation, le générateur de nombres aléatoires est censé avoir une loi uniforme sur $[0,1]$, ou, de façon plus réaliste, sur l'intersection de $[0,1]$ avec l'ensemble des nombres décimaux à un nombre fini fixé de décimales ; cette intersection est un ensemble fini.

Pour calculer une approximation du nombre π, une méthode très efficace est de tirer un grand nombre de points au hasard dans le carré $[-1,1]^2$ avec un tel générateur aléatoire, puis de regarder la fréquence à laquelle les points sont dans le disque de rayon 1 ; cette fréquence tend vers $\pi/4$ quand le nombre de points tend vers l'infini. C'est la *méthode de Monte-Carlo*.

– Nous aurons l'occasion de rencontrer d'autres mesures images, notamment la *loi normale*, dont la description exige néanmoins le concept de densité par rapport à la mesure de Lebesgue. En Théorie des Probabilités, on montre que sous des hypothèses assez générales le résultat d'une mesure expérimentale soumises à de petites fluctuations aléatoires suit une loi normale (gaussienne). Nous démontrerons en exercice la version la plus simple de ce résultat, connue sous le nom de Théorème central limite.

8. Centre de masse. Soient K un compact de $\mathbb{R}^d$, m une mesure bornée portée par K (c'est-à-dire $m(K^c) = 0$) et $M = m(K)$ la mesure de K. On pourra penser à m comme à une distribution de masse dans $K \subset \mathbb{R}^d$ et à M comme à la masse totale de la distribution.
a. Décrire la mesure m dans le cas particulier où la distribution de masse comprend une masse ponctuelle (chargant un point $p \in \mathbb{R}^d$) et une masse linéique (chargeant une courbe continue $\gamma : [0, L] \to \mathbb{R}^d$, $L > 0$, paramétrée par son abscisse curviligne).
b. Montrer qu'il existe un unique point $g(m) \in \mathbb{R}^d$ tel que

$$u(g(m)) = \frac{1}{M} \int u(x)\, dm(x)$$

pour toute forme linéaire u sur $\mathbb{R}^d$. Pour définir g, on pourra commencer par s'intéresser aux formes linéaires $x \in \mathbb{R}^d \mapsto x_i$. Le point $g(m)$ s'appelle le *centre de masse* de la distribution m.
c. Si m_1 et m_2 satisfont aux mêmes hypothèses que m, montrer que $g(m_1+m_2)$ est le barycentre des points $g(m_i)$ affectés des coefficients $m_i(\mathbb{R}^d)$ (propriété d'associativité du centre de masse).

Correction.
a. Notons m_p la masse de p dans une certaine unité, par exemple le kilogramme. Notons dt la mesure de Lebesgue de l'intervalle $[0, L]$ et $\rho : [0, L] \to [0, +\infty[$ la densité linéique de masse de γ exprimée dans la même unité de masse que m_p : si γ est continue, elle est mesurable, la mesure image $\gamma_* \rho\, dt = (\rho\, dt) \circ \gamma^{-1}$ de $\rho\, dt$ par γ est bien définie et si A est un borélien de $\mathbb{R}^d$, la masse de la partie de courbe contenue dans A est

$$(\gamma_* \rho\, dt)(A) = \int \mathbb{1}_A(\gamma(t))\, \rho(t)\, dt.$$

Alors la mesure m s'écrit

$$m = m_p \delta_p + \gamma_* (\rho\, dt).$$

b. En prenant comme formes linéaires les formes coordonnées $u_i : x \mapsto x_i$ $(i = 1, ..., d)$, on voit que les composantes $(g_1, ..., g_n)$ du point $g(m)$ recherché satisfont forcément

$$g_i = \frac{1}{M} \int x_i\, dm(x), \qquad i \in \{1, ...n\},$$

ce qui prouve que $g(m)$, s'il existe, est unique. De plus cette formule définit bien un point de $\mathbb{R}^d$, parce que les fonctions composantes $x \mapsto x_i$ sont bornées sur K et donc m-intégrables.

Par linéarité, la formule

$$u(g(m)) = \frac{1}{M} \int u(x)\, dm(x)$$

est alors satisfaite pour toute forme linéaire u sur $\mathbb{R}^d$.

c. Le centre de masse de $m_1 + m_2$ est

$$\begin{aligned} g(m_1+m_2) &= \frac{1}{M_1+M_2}\int x\,d(m_1+m_2) = \frac{1}{M_1+M_2}\left(\int x\,dm_1 + \int x\,dm_2\right) \\ &= \frac{1}{M_1+M_2}\left(M_1 g(m_1) + M_2 g(m_2)\right) \end{aligned}$$

(ces intégrales à valeurs vectorielles étant définies comme les vecteurs dont les composantes sont les integrales des composantes des intégrandes). C'est bien le barycentre des points $g(m_1)$ et $g(m_2)$ affectés chacun de la masse M_1 ou M_2.

9. Noyaux probabilistes. Soient $(X, \mathscr{A})$ un espace mesurable et ν un *noyau* sur $(X, \mathscr{A})$, c'est-à-dire une application

$$\nu : X \times \mathscr{A} \to \mathbb{R}^+, \quad (x, A) \mapsto \nu(x, A)$$

satisfaisant les deux propriétés suivantes :

1 ^{o} pour tout $x \in X$, l'application $\nu(x,\cdot) : A \in \mathscr{A} \mapsto \nu(x, A)$ est une mesure ;

2 ^{o} pour tout $A \in \mathscr{A}$, la fonction $\nu(\cdot, A) : x \in X \mapsto \nu(x, A)$ est $\mathscr{A}$-mesurable.

a. Soit μ une mesure sur $\mathscr{A}$. Montrer que l'application notée $\mu\nu$ et définie par

$$\mu\nu : \mathscr{A} \to \mathbb{R}^+, \quad A \mapsto \int (d\mu)\, \nu(\cdot, A) = \int d\mu(x)\, \nu(x, A)$$

est une mesure (dans l'intégrale, il est ici plus agréable noter la mesure avant la fonction).

b. Soit f une fonction mesurable positive. Montrer que la fonction notée νf et définie par

$$\nu f : X \to \mathbb{R}^+, \quad x \mapsto \int d(\nu(x,\cdot))\, f = \int \nu(x, dy)\, f(y)$$

est une fonction positive $\mathscr{A}$-mesurable.

c. Avec les notations précédentes, montrer qu'on a la règle d'associativité suivante :

$$\int d(\nu\mu)\, f = \int d\mu\, (\nu f).$$

d. Montrer que, si ω est un autre noyau, l'application

$$\nu\omega : X \times \mathscr{A} \to \mathbb{R}^+, \quad (x, A) \mapsto \int \nu(x, dy)\, \omega(y, A)$$

est un noyau.

Dans la suite, on décrit des exemples de noyaux.

e. Montrer que si $\theta : X \to X$ est une application mesurable, l'application

$$\nu_\theta : X \times \mathscr{A} \to \mathbb{R}^+, \quad (x, A) \mapsto \mathbb{1}_A(\theta(x))$$

définit un noyau ; puis montrer que si $n \geq 1$ on a $(\nu_\theta)^n = \nu_{\theta^n}$ (où la puissance du noyau est prise au sens de la question (d)).
f. Calculer $\lambda\nu_\theta$ en fonction de la mesure image de λ par θ lorsque X est l'intervalle $[0, 1]$, $\mathscr{A}$ sa tribu borélienne et λ la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$.
g. Expliciter cette mesure $\lambda\nu_\theta$ dans le cas où $\theta(x) = 2x \pmod 1$.

Dans la suite, on suppose que X est un ensemble dénombrable muni de la tribu $\mathscr{P}(X)$. Soient $M : X^2 \to \mathbb{R}^+$ une application quelconque et ν_M l'application

$$\nu_M : X \times \mathscr{P}(X) \to \mathbb{R}^+, \quad (x, A) \mapsto \sum_{y \in X} M(x, y)\mathbb{1}_A(y).$$

h. Montrer que ν_M est un noyau et caractériser en fonction de M les noyaux ν_M tels que pour tout $x \in X$ la mesure $\nu_M(x, \cdot)$ soit une probabilité ; ν_M prend alors le nom de *noyau de probabilité*.

On suppose désormais que ν_M est un noyau de probabilité.
i. Montrer que si μ_0 est une probabilité sur X, pour tout entier $n \geq 1$ la formule

$$\mu_n(\{x\}) = \mu_0(\{x_1\})\, M(x_1, x_2) \ldots M(x_{n-1}, x_n), \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in X^n,$$

définit une probabilité sur $(X^n, \mathscr{P}(X^n))$.
j. Montrer qu'il existe au plus une unique probabilité μ sur $X^{\mathbb{Z}}$ telle que pour tous $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$ et $x_0^o, \ldots, x_n^o \in X$, on ait

$$\mu(\{x \in X^{\mathbb{Z}},\ x_p = x_1^o, \ldots, x_{p+n} = x_n^o\}) = \mu_n(x_1^o, \ldots, x_n^o).$$

(Un théorème de Kolmogorov affirme qu'une telle probabilité μ existe. En Probabilités, M s'appelle une *matrice de transition*, μ_0 est une *probabilité initiale*, et les noyaux probabilistes servent à étudier les *chaînes de Markov*.)

Correction.
a. La fonction $\mu\nu : \mathscr{A} \mapsto \mathbb{R}^+$ vérifie :
$1^{\,o}$ $\mu\nu(\emptyset) = \int d\mu(x)\, \nu(x, \emptyset) = \int d\mu(x)\, 0 = 0.$

2 ^{o} $\mu\nu$ est σ-additive, puisque, si (A_n) une suite de parties de X deux à deux disjointes,

$$\begin{aligned}\mu\nu(\cup_n A_n) &= \int d\mu(x)\, \nu(x, \cup_n A_n) \quad \text{(définition de } \mu\nu)\\ &= \int d\mu(x) \sum_n \nu(x, A_n) \quad (\sigma\text{-additivité des mesures } \nu(x,\cdot))\\ &= \sum_n \int d\mu(x)\nu(x, A_n) \quad \text{(théorème de convergence monotone)}\\ &= \sum_n \mu\nu(A_n) \quad \text{(définition de } \mu\nu).\end{aligned}$$

Elle est donc une mesure positive.

b. Comme f est mesurable et positive, il existe une suite croissante (f_n) de fonctions mesurables, étagées et positives, qui converge uniformément vers f. Chaque fonction f_n est une combinaison linéaire finie de fonctions indicatrices :

$$f_n = \sum_{z \in f_n(X)} z\, \mathbb{1}_{\{f_n = z\}}.$$

Donc on a

$$(\nu f_n)(x) = \int \nu(x, dy)\, f_n(y) = \sum_{z \in f_n(X)} \nu(x, \{f_n = z\})\, z,$$

et νf_n est mesurable. De plus, d'après le théorème de convergence monotone on a

$$(\nu f)(x) = \int \nu(x, dy) \left(\lim_n \uparrow f_n(y)\right) = \lim_n \uparrow \nu f_n(x).$$

Comme νf est la limite (croissante, mais peu importe) d'une suite de fonctions mesurables, elle est elle-même mesurable.

c. Si f est étagée, mesurable et positive, les deux quantités

$$\int d(\mu\nu)\, f = \sum_{z \in f(X)} \left(\int d\mu(x)\, \nu(x, \{f = z\})\right) z$$

et

$$\int d\mu\, (\nu f) = \int d\mu(x) \left(\int \nu(x, dy)\, f(y)\right) = \sum_{z \in f(X)} \left(\int d\mu(x)\, \nu(x, \{f = z\})\right) z$$

coïncident. Le cas général où f est une fonction mesurable positive découle alors du théorème de convergence monotone.

d. Pour tout $x \in X$, $\nu(x, \cdot)$ est une mesure, donc, d'après la question (a), la fonction $A \mapsto (\nu\omega)(x, A)$ est une mesure. Par ailleurs, pour tout $A \in \mathscr{A}$, $\omega(\cdot, A)$ est une fonction mesurable, donc, d'après la question (b), la fonction $x \mapsto (\nu\omega)(x, A)$ est mesurable. Donc $\nu\omega$ est un noyau.

e. Pour tout $x \in X$ et tout $A \in \mathscr{A}$, on a

$$\nu_\theta(x, A) = \mathbb{1}_A(\theta(x)) = \delta_{\theta(x)}(A)\ ;$$

donc $\nu_\theta(x, \cdot)$ est la mesure de Dirac en $\theta(x)$. De plus, la fonction $x \mapsto \mathbb{1}_A(\theta(x))$ est mesurable comme composée de fonctions mesurables. Donc ν_θ est un noyau.

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned}\nu_\theta^2(x, A) &= \int \nu(x, dy)\, \nu(y, A) = \int d\delta_{\theta(x)}(y)\, \nu(y, A)\\ &= \nu_\theta(\theta(x), A) = \nu_{\theta^2}(x, A).\end{aligned}$$

Par récurrence on trouve la formule annoncée : $\nu_\theta^n = \nu_{\theta^n}$.

f. On a

$$\begin{aligned}\lambda\nu(A) &= \int \lambda(dx)\, \nu(x, A) = \int \lambda(dx)\, \mathbb{1}_A(\theta(x))\\ &= \int \lambda(dx)\, \mathbb{1}_{\theta^{-1}(A)}(x) = \lambda(\theta^{-1}(A)) = \theta_*\lambda(A).\end{aligned}$$

g. Considérons maintenant la fonction θ particulière donnée dans l'énoncé. La fonction $x \in [0,1] \mapsto 2x$ est continue donc borélienne. Donc la fonction

$$\theta : y \in [0,2] \mapsto y \pmod 1 = y\,\mathbb{1}_{[0,1[} + (y-1)\,\mathbb{1}_{[1,2[} + (y-2)\,\mathbb{1}_{\{2\}}$$

elle-même est borélienne parce qu'elle est se calcule comme somme et produit de fonctions continues et de fonctions indicatrices de parties boréliennes.

La mesure $\theta_*\lambda$ coïncide avec λ sur les intervalles de $\mathbb{R}$. Or l'ensemble des intervalles de $[0,1]$ est un π-système. Donc $\theta_*\lambda = \lambda$.

h. Pour tout $A \subset X$, la fonction $x \mapsto \nu_M(x,A)$ est mesurable parce que X est muni de la tribu $\mathscr{P}(X)$, qui rend mesurable toute fonction sur X. De plus, on a bien $\nu_M(\emptyset) = 0$ et, si (A_n) est une suite de parties de X deux à deux disjointes, $\mathbb{1}_{\cup_n A_n} = \sum_n \mathbb{1}_{A_n}$, ce qui implique comme précédemment que $\nu_M(x,\cdot)$ est σ-additive ; donc $\nu_M(x,\cdot)$ est une mesure. Donc ν_M est un noyau. Elle est un noyau probabiliste si et seulement si $\nu_M(x,X) = 1$ pour tout $x \in X$, c'est-à-dire

$$\sum_{y\in X} M(x,y) = 1 \quad (\forall\, x \in X).$$

i. Comme X^n est un ensemble dénombrable, une mesure sur X^n est uniquement définie par sa valeur sur les singletons. La seule chose à vérifier est donc que $\mu_n(X^n) = 1$. Mais ceci découle de la question précédente et de la récurrence suivante :

$$\begin{aligned}
\mu_n(X^n) &= \mu_n\left(\cup_{x\in X^n}\{x\}\right) = \sum_{x\in X^n} \mu_n(\{x\}) \\
&= \sum_{x_1\in X} \dots \sum_{x_n\in X} \mu_0(\{x_1\})\, M(x_1,x_2) \dots M(x_{n-1},x_n) \\
&= \sum_{x_1\in X} \dots \sum_{x_{n-1}\in X} \mu_0(\{x_1\})\, M(x_1,x_2) \dots M(x_{n-2},x_{n-1}) \\
&= \dots = \sum_{x_1\in X} \mu_0(\{x_1\}) = 1.
\end{aligned}$$

j. L'unicité découle encore de l'unicité d'une mesure définie sur un π-système.

CHAPITRE 3

Interversion de limites et d'intégrales

Sommaire

1. Intégrales et primitives.

a. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que la fonction

$$F : x \in [a, b] \mapsto \int_{[a,x]} f(t)\, dt$$

est une primitive de f (F est dérivable sur $[a, b]$ et $F' = f$).

b. Donner un exemple de dérivée f mesurable non continue.

c. Soient $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable bornée, et F une primitive de f. Montrer que l'on a

$$\int_{[a,b]} f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

d. Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables de dérivées bornées. Montrer que l'on a la *formule d'intégration par parties* :

$$\int_{[a,b]} f'g = [fg]_a^b - \int_{[a,b]} fg'.$$

e. Déduire de la question (c) l'intégrale sur $[1, +\infty[$ de la fonction $f_\alpha : x \mapsto 1/x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, et montrer que f_α est intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$.

f. Notons $\ln_0 x = x$ et, pour tout $p \geq 1$, $\ln_p x = \ln_{p-1} \ln x$. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$ la fonction $\ln_p$ est naturellement définie sur un intervalle $]a_p, +\infty[$, avec $a_0 = -\infty$, $a_1 = 0$ et, pour tout $p \geq 2$, $a_p = e^{a_{p-1}}$. Généraliser alors la question précédente en montrant que la fonction

$$g_p : x \mapsto \frac{1}{x(\ln x)(\ln_2 x)...(\ln_{p-1} x)(\ln_p x)^\alpha} \quad (p \in \mathbb{N})$$

est intégrable sur $[a_p + 2, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$.

Correction.

a. Quel que soient $x \in [a, b]$ et $h \in [a - x, b - x] \setminus \{0\}$, par linéarité de l'intégrale on a

$$\tau_x(h) = \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\, dt.$$

Soit $\epsilon > 0$. Comme f est continue en x, il existe un réel $H > 0$ tel que quel que soit $0 < h < H$ on ait $|f(x+h) - f(x)| < \epsilon$, donc

$$|\tau_x(h) - f(x)| \leq \epsilon.$$

Donc τ_x possède une limite en $h = 0$ et cette limite vaut $f(x)$.

b. La fonction $F : x \mapsto x^2 \sin(1/x)$ (prolongée par la valeur 0 en 0) est dérivable, mais sa dérivée f n'est pas continue en 0 : si $x \neq 0$, on a $f(x) = 2x \sin(1/x) - \sin(1/x)$, qui n'a pas de limite en 0.

c. Soit $(g_n)_{n \geq 1}$ la suite de fonctions sur $[a, b]$ définie par

$$g_n(x) = \begin{cases} \text{le taux d'accroissement de } F \text{ entre } x \text{ et } x + 1/n \text{ si } x + 1/n \leq b \\ 0 \text{ sinon,} \end{cases}$$

soit

$$g_n(x) = \begin{cases} \dfrac{F(x+1/n) - F(x)}{1/n} & \text{si } a \leq x \leq b - 1/n \\ 0 & \text{si } b - 1/n < x \leq b. \end{cases}$$

Pour tout $x \in [a, b[$, il existe un rang $N \geq 1$ tel que $x < b - 1/N$. Alors, pour tout $n \geq N$ on a

$$g_n(x) = \frac{F(x+1/n) - F(x)}{1/n}.$$

Or, par hypothèse F est dérivable sur $[a, b]$ de dérivée f. Donc la suite numérique $(g_n(x))$ converge vers $f(x)$. De plus, $(g_n(b))$ est la suite constante égale à 0. Donc la suite de fonctions (g_n) converge simplement sur $[a, b]$ vers la fonction $f\mathbb{1}_{[a,b[}$.

Soit $n \geq 1$. Par hypothèse, f est bornée. Donc $M = \sup_{[a,b]} |f|$ est finie. D'après le théorème des accroissements finis, pour tout $x \in [a, b - 1/n]$ on a $|g_n(x)| \leq M$. Cette dernière majoration est trivialement vraie si $b - 1/n < x \leq b$. Donc sur $[a, b]$ on a $|g_n| \leq M$; donc (g_n) est dominée par une fonction intégrable.

D'après le théorème de convergence dominée, on a

$$\lim_n \int_{[a,b]} g_n(x)\, dx = \int_{[a,b[} f(x)\, dx = \int_{[a,b]} f(x)\, dx.$$

Nous allons calculer le membre de gauche d'une autre façon. Comme f est intégrable sur $[a, b]$, elle l'est aussi sur $[a, b - 1/n]$. Donc, par linéarité de l'intégrale on a

$$\int_{[a,b]} g_n(x)\, dx = n \int_a^{b-1/n} F(x + 1/n)\, dx - n \int_a^{b-1/n} F(x)\, dx.$$

D'après la formule d'intégration par rapport à une mesure image et comme la mesure de Lebesgue est invariante par translation (on pourrait aussi utiliser la formule du changement de variable, à venir dans le cours), la première intégrale du membre de droite vaut $n\int_{a+1/n}^b f(x)\,dx$. Donc, encore en utilisant la linéarité de l'intégrale (ou la relation de Chasles),

$$\int_{[a,b]} g_n(x)\,dx = n\int_{b-1/n}^b F(x)\,dx - n\int_a^{a+1/n} F(x)\,dx.$$

Soit $\epsilon > 0$. Comme F est dérivable donc continue en 0, il existe un rang n à partir duquel on a

$$|F(x) - F(a)| < \epsilon \quad \text{pour tout } x \in [a, a+1/n],$$

donc, par croissance de l'intégrale,

$$\left| n\int_a^{a+1/n} F(x)\,dx - F(a)\right| < \epsilon.$$

Donc

$$n\int_a^{a+1/n} F(x)\,dx \to_{n\to+\infty} F(a)$$

et, de même,

$$n\int_{b-1/n}^b F(x)\,dx \to_{n\to+\infty} F(b).$$

Donc

$$\lim_n \int_{[a,b]} g_n(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

et la formule cherchée en découle.

d. La fonction f est dérivable, donc continue, donc borélienne. De plus, f' est automatiquement borélienne parce que f' est la limite simple de la suite

$$\phi_n : x \in [a,b] \mapsto \begin{cases} n(f(x+1/n) - f(x)) & \text{si } x \leq b - 1/n \\ f'(b) & \text{sinon.} \end{cases}$$

De même, g et g' sont boréliennes.

Comme f et g sont dérivables, elles sont bornées. Comme de plus f' et g' sont supposées bornées, $f'g' = f'g + fg'$ est bornée. D'après la question précédente on a donc

$$\int_{[a,b]} (fg)' = [fg]_a^b.$$

Par ailleurs, $f'g$ et fg' sont bornées donc intégrables sur $[a,b]$. Donc

$$\int_{[a,b]} (fg)' = \int_{[a,b]} f'g + \int_{[a,b]} fg'.$$

En comparant les deux expressions obtenues on obtient la formule voulue.

e. (Une réponse possible serait de citer le résultat analogue pour l'intégrale de Riemann généralisée, puis d'en déduire le résultat pour l'intégrale de Lebesgue. Il est cependant préférable, dans un cours qui prétend contruire un outil d'intégration plus puissant que l'intégrale de Riemann, de se passer totalement de celle-ci.)

Soit d'abord $\alpha \neq 1$. Pour tout $A > 1$, d'après la question (c) on a

$$\int_{[1,A]} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{-1}{\alpha-1}\left[\frac{1}{x^{\alpha-1}}\right]_1^A = \frac{1}{\alpha-1}\left(1 - \frac{1}{A^{\alpha-1}}\right) \to_{n\to+\infty} \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha-1} & \text{si } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{si } \alpha < 1. \end{cases}$$

Comme la fonction $1/x^\alpha$ est positive, la suite des fonctions

$$\frac{1}{x^\alpha}\mathbb{1}_{[1,A]}$$

est croissante en fonction de A. Donc d'après le théorème de convergence monotone on a

$$\int_{[1,+\infty]} \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha-1} & \text{si } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{si } \alpha < 1. \end{cases}$$

Donc $x \mapsto 1/x^\alpha$ est intégrable quand $\alpha > 1$ et non intégrable quand $\alpha < 1$. Dans le cas $\alpha = 1$, on démontre de façon analogue que $\int_1^\infty dx/x = +\infty$ et donc que $x \mapsto 1/x$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$.

f. L'intervalle de définition de $\ln_p$ se détermine par récurrence. Une primitive de g_p est

$$\begin{cases} \dfrac{-1}{\alpha-1}\left((\ln_p x)^{1-\alpha}\right) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \ln_{p+1} x & \text{si } \alpha = 1. \end{cases}$$

Le raisonnement est alors analogue à celui de la question précédente.

2. Passages à la limite dans une intégrale.

Calculer les limites des intégrales suivantes quand n tend vers $+\infty$:

$$u_n = \int_0^1 \frac{1+nx^3}{(1+x^2)^n}\,dx, \quad v_n = \int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\,dx, \quad \text{et} \quad w_n = \int_0^\infty \frac{\sin(\pi x)}{1+x^n}\,dx.$$

Correction.

a. Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par

$$f_n(x) = \frac{1+nx^3}{(1+x^2)^n}.$$

Ces fonctions sont boréliennes parce qu'elles sont continues sur $[0,1]$.

La suite (f_n) converge simplement (mais pas uniformément) vers la fonction $f : x \mapsto 0$ si $x \in]0,1]$ et 1 si $x = 0$. D'autre part, pour tout $x \in [0,1]$ on a $(1+x^2)^n \geq 1+nx^2 \geq 1+nx^3$, donc $|f_n(x)| \leq 1$; la constante 1 est intégrable sur $[0,1]$ (parce qu'elle est mesurable positive et que son intégrale vaut 1). Donc, d'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{1+nx^3}{(1+x^2)^n}\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx = dx(\{1\}) = 0.$$

b. Soit $(g_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions définies sur $[0,+\infty[$ par

$$g_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\mathbb{1}_{[0,n]}(x).$$

Les fonctions $x \mapsto (1+x/n)^n e^{-2x}$ sont continues donc boréliennes ; les fonctions $\mathbb{1}_{[0,n]}$, en tant que fonctions indicatrice des boréliens $[0,n]$, sont aussi intégrables. Donc les f_n, en tant que produits de fonctions mesurables, sont mesurables.

La suite (g_n) converge simplement vers la fonction g définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g(x) = e^{-x}$. Par ailleurs, on a $1+x/n \leq e^{x/n}$, donc $(1+x/n)^n \leq e^x$, donc $g_n(x) \leq g(x)$. L'intégrale de Riemann de g sur $\mathbb{R}^+$ est absolument convergente, donc g est Lebesgue-intégrable. D'après le théorème de convergence dominée on a donc

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} g_n(x)\,dx = \int_0^{+\infty} g(x)\,dx = 1.$$

c. Soit $(h_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions définies sur $[0,+\infty[$ par

$$h_n(x) = \frac{\sin(\pi x)}{1+x^n}.$$

Ces fonctions sont continues donc mesurables.

La suite (h_n) converge simplement vers $h : x \mapsto \sin(\pi x)\mathbb{1}_{]0,1[}(x)$ sur $\mathbb{R}^+$. De plus, pour tout $n \geq 2$ on a

$$|h_n(x)| \leq k(x) = \mathbb{1}_{]0,1[}(x) + \frac{1}{x^2}\mathbb{1}_{[1,\infty[}(x).$$

La fonction k étant continue par morceaux, positive et bornée sur $\mathbb{R}^+$, égale à $1/x^2$ au voisinage de $+\infty$, son intégrale de Riemann est absolument convergente ; donc k est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Donc d'après le théorème de convergence dominée on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^+} h_n\,dx = \int_0^1 \sin(\pi x)\,dx = \frac{2}{\pi}.$$

3. Interversions d'une somme de série et d'une intégrale.

a. Soit a et b deux réels strictement positifs. Pour $x \in \mathbb{R}_*^+$, soit

$$f(x) = \frac{xe^{-ax}}{1 - e^{-bx}}.$$

Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^+} f\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(a+nb)^2}.$$

b. Soit μ une mesure sur $\mathbb{R}$ telle que la fonction $x \mapsto e^{x^2}$ soit μ-intégrable. Donner un exemple d'une telle mesure μ, puis montrer que pour tout nombre complexe z on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int_{\mathbb{R}} x^n\, d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{zx}\, d\mu(x).$$

c. Montrer que la fonction $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$$

est intégrable sur $[1, +\infty[$ relativement à la mesure de Lebesgue, et calculer son intégrale.

Correction.

a. Pour $x > 0$ on a

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x), \quad \text{avec} \quad f_n(x) = xe^{-(a+nb)x}.$$

Les fonctions f_n étant toutes positives, on peut intervertir sommation et intégration, de sorte que l'on a

$$\int_{\mathbb{R}^+} f(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^+} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^+} f_n(x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(a+nb)^2} \;;$$

la dernière égalité découle par exemple d'une intégration par partie.

b. Un exemple de mesure recherchée est la mesure de Dirac en un point $x \in \mathbb{R}$.

La suite (f_n) avec $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (xz)^k/k!$ converge simplement vers $f : x \mapsto e^{zx}$. De plus elle satisfait les majorations suivantes :

$$|f_n(x)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|xz|^k}{k!} = e^{|xz|} = e^{|xz|}\left(\mathbb{1}_{\{|x| \leq |z|\}} + \mathbb{1}_{\{|x| > |z|\}}\right) \leq e^{|z|^2} + e^{x^2} \;;$$

par hypothèse, la fonction $x \mapsto e^{x^2}$ est μ-intégrable, et ceci implique que la fonction constante $x \mapsto e^{|z|^2} \leq e^{|z|^2} e^{x^2}$ l'est aussi, donc les f_n sont bien dominées par une fonction $x \mapsto e^{|z|^2} + e^{x^2}$ qui est μ-intégrable.

Donc le théorème de convergence dominée implique

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\, d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, d\mu(x).$$

Or par linéarité de l'intégrale on a

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \int_{\mathbb{R}} x^k\, \mu(dx) = \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\, d\mu(x).$$

Donc on a la formule voulue :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \int_{\mathbb{R}} x^k \, d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{zx} \, d\mu(x).$$

c. Les fonctions $f_n : x \mapsto ne^{-nx}$ sur $[1, +\infty[$ sont positives et mesurables. Donc on peut intervertir la sommation de la série et l'intégration, de sorte que

$$\int_{[1,+\infty[} \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx} \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{[1,+\infty[} ne^{-nx} \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} = \frac{1}{e-1}.$$

(Comme le résultat est fini, en particulier la fonction f est intégrable.)

4. Dérivation sous le signe somme. Soit

$$f(x,t) = e^{-xt} \frac{\sin x}{x} \, \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x).$$

a. Montrer que pour tout $t > 0$ la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.
b. Montrer que la fonction F définie par

$$F(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x,t) \, dx$$

est dérivable sur $]0, +\infty[$.
c. Exprimer F à l'aide de fonctions élémentaires.
d. Peut-on en déduire que la fonction $x \mapsto \sin x/x$ est intégrable sur $[0, +\infty[$?

Correction.
a. Fixons $t > 0$. En tant que produit d'une fonction continue par la fonction caractéristique d'un ensemble mesurable, la fonction

$$x \mapsto f(x,t) = e^{-xt} \frac{\sin x}{x} \, \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$$

est mesurable par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. De plus on a $|f(x,t)| \leq e^{-xt}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$, où cette dernière fonction est intégrable puisque son intégrale de Riemann est absolument convergente. Donc $x \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
b. Pour tout $t_0 > 0$ fixé, il existe deux réels a et b tels que $0 < a < t_0 < b$. Alors pour tout $x > 1$ la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est dérivable sur $]a, b[$ et sa dérivé satisfait à la majoration

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) \right| = e^{-xt} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x),$$

cette dernière fonction étant intégrable.

Donc F est dérivable en $t_0 \in]0, +\infty[$ et on peut intervertir dérivation par rapport à t et intégration par rapport à x :

$$F'(t_0) = -\int_{\mathbb{R}} e^{-xt_0} \sin x \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x) \, dx = -\int_{[0,+\infty]} e^{-xt_0} \sin x \, dx.$$

c. Pour tout $t > 0$ et tout $A > 0$, deux intégrations par parties montrent que

$$\int_0^A e^{-tx} \sin x \, dx = -e^{-tA} \cos A + 1 - te^{-tA} \sin A - t^2 \int_0^A e^{-tx} \sin x \, dx.$$

Donc l'intégrale de Riemann de $x \mapsto e^{-tx} \sin x$ sur $[0, +\infty[$ vaut

$$\int_0^\infty e^{-tx} \sin x \, dx = 1/(1+t^2).$$

Cette intégrale est absolument convergente, donc elle coïncide avec l'intégrale de Lebesgue, de sorte que

$$F'(t) = \frac{-1}{1+t^2}.$$

Donc il existe un réel c tel que $F(t) = -\text{Arctan}\, t + c$.

Pour déterminer c, on peut remarquer que $|F(t)| \leq \int_{[0,+\infty[} e^{-xt} \, dx = 1/t$. Donc

$$\lim_{t \to +\infty} F(t) = 0,$$

$c = \pi/2$ et

$$F(t) = \pi/2 - \text{Arctan}\, t.$$

d. On voit que la limite de F quand t tend vers 0 vaut $\pi/2$. On pourrait être tenté d'en déduire en passant à la limite sous le signe somme que $\sin x/x$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et que son intégrale vaut $\pi/2$. Mais le fait est que $\sin x/x$ n'est pas intégrable (ceci sera démontré dans le chapitre suivant). On peut certes montrer que la limite quand a tend vers $+\infty$ que $\int_0^a \sin x/x \, dx$ tend vers $\pi/2$, mais ceci ne résulte pas du théorème de convergence dominé appliqué directement à $f(x,t)$.

5. Calcul d'un équivalent par la méthode de Laplace. *Cet exercice utilise la formule du changement de variables telle qu'elle sera démontrée ultérieurement ; elle est formellement la même que pour les fonctions intégrables au sens de Riemann.*

Soit $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ une fonction borélienne intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue. On suppose que f possède une limite $f(1^-) \in \mathbb{R}_*$ à gauche en 1. On veut démontrer l'équivalent suivant quand n tend vers $+\infty$:

$$I_n = \int_0^1 x^n f(x) \, dx \sim \frac{f(1^-)}{n}.$$

a. Montrer que I_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
b. Montrer l'équivalence voulue dans le cas où f est de classe C^1 sur $[0,1]$, en faisant une intégration par partie.
c. Pourquoi ne peut-on pas généralement appliquer le théorème de convergence dominée directement à nI_n ?
d. Démontrer l'équivalent de I_n en coupant l'intervalle $[0,1]$ en deux : un voisinage de 1 sur lequel f est bornée et où l'on pourra faire le changement de variables $y = x^n$, et son complémentaire.

Correction.

a. Pour tout $x \in [0,1[$, la suite numérique $(x^n f(x))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0. Donc presque partout sur $[0,1]$ la suite de fonctions $(x^n f(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers 0. Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction $x \mapsto x^n f(x)$ est dominée sur $[0,1]$, en valeur absolue, par la fonction intégrable f. Donc d'après le théorème de convergence dominée l'intégrale I_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
b. Une intégration par parties montre que

$$nI_n = \frac{n}{n+1}\left(f(1) - \int_0^1 x^{n+1} f'(x)\,dx\right).$$

Le premier terme du membre de droite de l'égalité tend vers $f(1)$. Le second tend, lui, vers 0, comme une simple application du théorème de convergence dominée le montre (remplacer f par f' et n par $n+1$ dans la question précédente). Finalement, $nI_n \to f(1)$, et l'équivalent en découle.
c. Quand n tend vers $+\infty$, la suite de fonctions $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} = (nx^n f(x))_{n\in\mathbb{N}}$ tend simplement vers 0 presque partout. Pour appliquer le théorème de convergence dominée, il faudrait de plus montrer que la suite $(f_n)_n$ est majorée par une fonction intégrable, presque partout sur $[0,1]$.

Mais une telle fonction intégrable, en général, n'existe pas. En effet, si elle existait, on pourrait appliquer le théorème de convergence dominée et conclure que nI_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Or la question (b) prouve que ce n'est pas le cas, déjà quand f est classe C^1.
d. Comme f a une limite finie quand x tend vers 1, il existe deux réels $\alpha \in [0,1[$ et $M > 0$ tels que $|f(x)| \le M$ sur $[\alpha,1]$.

Notons $f_n(x) = nx^n f(x)$. Quand n tend vers $+\infty$, la suite (f_n) tend simplement vers 0 sur $[0,\alpha]$. En outre, comme nx^n tend vers 0, on a $|f_n(x)| \le |f(x)|$ sur $[0,\alpha]$ à partir d'un certain rang. Donc, d'après le théorème de convergence dominée,

$$\int_0^\alpha nx^n f(x)\,dx \to 0.$$

Par ailleurs on a

$$\int_\alpha^1 nx^n f(x)\,dx = \int_{\alpha^n}^1 y^{1/n} f(y^{1/n})\,dy.$$

(Ici on admet que la formule du changement de variable est valable aussi avec l'intégrale de Lebesgue, ce qui sera démontré dans un ultérieur du Cours). Or la suite des fonctions $y^{1/n} f(y^{1/n})\mathbb{1}_{[\alpha^n,1]}$ tend simplement vers la fonction constante $f(1^-)$ et elle est majorée en valeur absolue par la fonction constante M, qui est intégrable sur $[0,1]$. Donc, d'après le théorème de convergence dominée,

$$\int_\alpha^1 nx^n f(x)\,dx \to \int_0^1 f(1^-)\,dy = f(1^-).$$

Finalement, $nI_n \to f(1^-)$, et, si $f(1^-) \neq 0$,

$$\int_0^1 x^n f(x)\,dx \sim \frac{f(1^-)}{n}.$$

6. Formule de Stirling par la méthode de Laplace. *Cet exercice aussi exige d'utiliser la formule du changement de variables telle qu'elle sera démontrée ultérieurement.*

On veut montrer la formule de Stirling :

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \quad \text{quand } n \text{ tend vers } +\infty.$$

a. Montrer par récurrence que pour tout $n \ge 0$ on a

$$n! = \int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx.$$

b. Pour $n \geq 1$, faire le changement de variable $x = nu$ dans l'intégrale précédente.
c. Trouver un équivalent de
$$\int_0^1 (ue^{-u})^n \, du.$$
d. Trouver l'équivalent analogue de $\int_1^\infty (ue^{-u})^n \, du$, et en déduire la formule de Stirling.

Correction.
a. Notons
$$I_n = \int_0^\infty x^n e^{-x} \, dx.$$
On a $I_0 = 1$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$ une intégration par partie montre :
$$I_n = \frac{I_{n+1}}{n+1}.$$
Donc par récurrence $I_n = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
b. Quand on pose $x = nu$, la formule du changement de variable donne
$$n! = \int_0^\infty n^{n+1} (ue^{-u})^n \, du.$$
c. Notons $f(u) = ue^{-u}$. La fonction f possède un maximum en 1. Il est donc naturel de scinder l'intégrale $\int_0^\infty f^n \, du$ en 1, et l'hypothèse de simplicité suggère que chacun des deux bouts aura une contribution équivalente, en $\mathrm{Cst}/(\sqrt{n}e^n)$.

Soit $\alpha \in [0, 1[$ à choisir ultérieurement. La suite de fonctions $(\sqrt{n}e^n f(u)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfait l'estimation :
$$|\sqrt{n}e^n f(u)^n| \leq \sqrt{n} \left(\frac{f(\alpha)}{f(1)} \right)^n \quad \text{sur } [0, \alpha],$$
donc elle converge uniformément vers 0 sur $[0, \alpha]$. Donc
$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^\alpha \sqrt{n} e^n f(u)^n = 0.$$

Rappelons la formule de Taylor-Lagrange avec reste intégrale pour une fonction $f : [x, x + h] \to \mathbb{R}^p$ de classe C^{n+1} :
$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2} f''(x) h^2 + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x) h^n \\ &\quad + \left(\int_0^1 \frac{1}{n!} (1-t)^n f^{n+1}(x + th) \, dt \right) h^{n+1} \; ; \end{aligned}$$
cette formule se démontre par récurrence en intégrant le reste intégral n fois par parties. Dans notre cas, où $f(u) = ue^{-u}$, $x = 1$ et $x + h = u$ on a :
$$\begin{aligned} f(u) &= \frac{1}{e} - \frac{1}{2e}(u-1)^2 + \int_0^1 \frac{(1-t)^2}{2} e^{-(1-t+tu))} (2 - t(u-1)) \, dt \, (u-1)^3 \\ &= \frac{1}{e} \left(1 - \frac{1}{2}(u-1)^2 + \rho(u)(u-1)^3 \right), \end{aligned}$$
où ρ est une fonction de classe C^∞ sur $[0, 1]$. Une nouvelle application de la formule de Taylor-Lagrange prouve l'existence d'une fonction ρ_1 de classe C^∞ sur $[0, 1]$ et telle que
$$f(u)^n = \frac{1}{e^n} e^{-\dfrac{n}{2}(u-1)^2 (1 + \rho_1(u))}.$$
Alors
$$\int_\alpha^1 \sqrt{n} e^n f(u)^n \, du = \int_\alpha^1 \sqrt{n} e^{-\dfrac{n}{2}(u-1)^2 (1 + \rho_1(u)(u-1))} \, du.$$

En posant $v = \sqrt{\frac{n}{2}}(u-1)$ (et en admettant la formule du changement de variable, qui ne sera justifiée pour l'intégrale de Lebesgue qu'ultérieurement), on obtient :

$$\int_\alpha^1 \sqrt{n}e^n f(u)^n\,du = \int_{\sqrt{n/2}(\alpha-1)}^0 \sqrt{2}e^{-v^2\left(1-\rho_2(v)\sqrt{\frac{2}{n}}v\right)}\,dv,$$

où $v \mapsto \rho_2(v) := \rho_1(u)$ est une fonction de classe C^∞ sur $[-\sqrt{n/2}, 0]$. On a maintenant intérêt à choisir le réel $\alpha \in [0, 1[$ de façon que par exemple $|\rho_1(u)(u-1)| \leq 1/2$ sur $[\alpha, 1]$, soit, de façon équivalente,

$$\left|\rho_2(v)\sqrt{\frac{2}{n}}v\right| \leq \frac{1}{2} \quad \text{sur } [-\sqrt{n/2}, 0].$$

Dans ces conditions, la suite de fonctions $\left(\exp\left(-v^2\left(1-\rho_2(v)\sqrt{\frac{2}{n}}v\right)\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $v \mapsto e^{-v^2}$ sur $[-\infty, 0]$ et satisfait l'estimation :

$$\left|\exp\left(-v^2\left(1-\rho_2(v)\sqrt{\frac{2}{n}}v\right)\right)\right| \leq e^{-v^2/2},$$

où $v \mapsto e^{-v^2/2}$ est intégrable sur $]-\infty, 0]$. D'après le théorème de convergence dominée, on a donc

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\alpha^1 \sqrt{n}e^n f(u)^n\,du = \int_{-\infty}^0 e^{-v^2}\,dv.$$

Or $\int_{-\infty}^0 e^{-v^2}\,dv = \sqrt{\pi}/2$ (cette intégrale se rencontre souvent, notamment en Mécanique statistique et analyse harmonique ; elle sera l'objet d'un exercice ultérieurement). Donc on obtient l'équivalent :

$$\int_0^1 (ue^{-u})^n\,du \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{\frac{\pi n}{2}}.$$

d. Le calcul analogue sur $[1, +\infty[$ montre :

$$\int_1^\infty (ue^{-u})^n\,du \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{\frac{\pi n}{2}}.$$

Finlement, on trouve :

$$n! = \int_0^1 (ue^{-u})^n\,du + \int_1^\infty (ue^{-u})^n\,du \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}.$$

8. Partie finie de Hadamard. Soient $a < b \in \mathbb{R}$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable, et $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par l'intégrale de Lebesgue

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

a. Montrer que F est continue sur $[a, b]$.

b. On suppose dans cette question que f est continue. Montrer que F est dérivable sur $[a, b]$ et a pour dérivée f. En déduire que f possède une primitive, et que, réciproquement, si F_0 est un primitive de f, on a $\int_a^b f(t)\,dt = F_0(b) - F_0(a)$.

Soit $\phi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1.

c. Déduire de la question précédente qu'il existe une fonction θ continue telle que

$$\phi(x) = \phi(0) + x\,\theta(x).$$

d. Dans quels cas la fonction $x \mapsto \phi(x)/x$ est-elle intégrable sur $[0,1]$ (on pourra utiliser le fait, après l'avoir démontré, que $1/x$ n'est pas intégrable) ? En déduire que, dans tous les cas, quand ϵ tend vers 0, la limite, notée P.f. $\int_0^1 \phi(t)/t\,dt$, de

$$\int_\epsilon^1 \frac{\phi(t)}{t}\,dt + \phi(0)\,\ln\epsilon,$$

existe (*partie finie de Hadamard* de $\int_0^1 \phi(t)/t\,dt$).

Correction.
a. Soient $c \in]a,b]$ et (x_n) une suite de $[a,c[$ qui tend vers c (par valeurs inférieures). La suite $(f\,\mathbb{1}_{[a,x_n]})$ converge simplement vers la fonction $f\,\mathbb{1}_{[a,c[}$ et est dominée par la fonction $|f|$, qui est intégrable. D'après le théorème de convergence dominée, on a

$$\lim_{n\to+\infty} F(x_n) = \lim_{n\to+\infty} \int_a^{x_n} f(t)\,dt = \int_{[a,c[} f(t)\,dt = \int_{[a,c]} f(t)\,dt = F(c).$$

Donc F est continue à gauche sur $]a,b]$. De même on voit que F est continue à droite sur $[a,b[$. Donc F est continue sur $[a,b]$.
b. Soient $c \in [a,b]$ et $h \in \mathbb{R}$ tels que $c+h \in [a,b]$. Le taux d'accroissement de F entre c et $c+h$ vaut

$$\tau_c(h) = \frac{F(c+h)-F(c)}{h} = \frac{1}{h}\int_c^{c+h} f(t)\,dt.$$

Comme f est continue en c, pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que pour tout t tel que $|t-c| < \eta$ on ait $|f(t)-f(c)| < \epsilon$. Alors, si $|h| < \eta$, par croissance de l'intégrale on a

$$|\tau_c(h) - f(c)| \le \epsilon.$$

Comme ceci est vrai pour tout ϵ, F est dérivable en c et $F'(c) = f(c)$. C'est dire que f possède une primitive et que F est la primitive de f telle que $F(a) = 0$. Si F_0 est une primitive quelconque de f, comme $(F-F_0)' = 0$ il existe un réel c tel que $F = F_0 + c$; comme $F(a) = 0$, on a $c = -F_0(a)$, donc

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) = F_0(b) - F_0(a).$$

c. D'après la question précédente,

$$\phi(x) - \phi(0) = \int_0^x \phi'(t)\,dt.$$

D'après la formule du changement de variable ($t = ux$),

$$\phi(x) - \phi(0) = x\theta(x), \quad \text{avec } \theta(x) = \int_0^1 \phi'(tx)\,dx.$$

Pour tout $t \in [0,1]$, la fonction $x \mapsto \phi(tx)$ est continue. Comme ϕ est continue, pour tout $x \in [0,1]$ la fonction $t \mapsto \phi(tx)$ est intégrable et dominée par une une constante qui ne dépend pas de x. Donc la fonction θ est continue sur $[0,1]$.

d. D'après la question précédente, on a

$$\frac{\phi(x)}{x} = \frac{\phi(0)}{x} + \theta(x),$$

où θ est continue donc intégrable. Donc $x \mapsto \phi(x)/x$ est intégrable si et seulement si $x \mapsto \phi(0)/x$ est intégrable, c'est-à-dire si et seulement si $\phi(0) = 0$.

Nous venons d'utiliser le fait que $1/x$ n'est pas intégrable. Redémontrons ce fait classique, pour l'exemple. Notons $f : [0,1] \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto 1/x$ si $x \neq 0$, et, par exemple, $f(0) = 0$. Soit $A \in]0,1]$. La fonction logarithme est une primitive de f sur $[A,1]$ et la restriction de f à l'intervalle $[A,1]$ est de classe C^∞, donc continue. D'après la question précédente, on a donc

$$\int_A^1 \frac{dt}{t} = -\ln A \geq 0,$$

et, en particulier, f est intégrable sur $[A,1]$. De plus, la suite croissante des fonctions positives $f\,\mathbb{1}_{[1/n,1]}$, $n \geq 1$, converge simplement vers f sur $]0,1]$, donc presque partout sur $[0,1]$. D'après le théorème de convergence monotone, on a donc

$$\int_{[0,1]} \frac{dt}{t} = \lim_n -\ln\frac{1}{n} = +\infty.$$

Donc $1/x$ n'est pas intégrable sur $[0,1]$.

Maintenant, comme $\phi(t) = \phi(0) + t\theta(t)$, on a

$$\int_\epsilon^1 \frac{\phi(t)}{t}\,dt + \phi(0)\,\ln\epsilon = \int_\epsilon^1 \left(\frac{\phi(0)}{t} + \theta(t)\right) dt + \phi(0)\,\ln\epsilon = \int_\epsilon^1 \theta(t)\,dt\ ;$$

comme θ est continue sur $[0,1]$, d'après le théorème de convergence dominée cette quantité a bien une limite quand ϵ tend vers 0.

9. Dérivation sous le signe somme — un cas pathologique simple. Considérons la fonction

$$\begin{array}{rccl} f: & [0,1]^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (t,x) & \mapsto & f(t,x) = |t-x|. \end{array}$$

a. Montrer que pour tout $t \in [0,1]$ la fonction $x \mapsto f(t,x)$ est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$ et calculer son intégrale $h(t)$.

b. Pouvait-on déduire du théorème de dérivation sous l'intégrale sur un intervalle ouvert, donc sans calculer h explicitement, que h serait dérivable ?

c. Adapter la démonstration du théorème de dérivation sous l'intégrale global pour démontrer que h est dérivable sans calculer $h(t)$, en utilisant le théorème de convergence dominée et le théorème des accroissements finis.

Correction.

a. Pour tout $(t,x) \in [0,1]^2$ on a

$$|t-x| \leq 2,$$

où la fonction constante $x \mapsto 2$ est intégrable sur $[0,1]$. Donc, pour tout $t \in [0,1]$ la fonction $x \mapsto |t-x|$ est intégrable. Cette dernière est continue, donc son intégrale coïncide avec son intégrale de Riemann. Un calcul élémentaire donne alors, pour tout $t \in [0,1]$:

$$F(t) = \int_{[0,1]} |t-x|\,dx = \int_0^t (t-x)\,dx + \int_t^1 (x-t)\,dx = t^2 - t + \frac{1}{2}.$$

b. Le polynôme F est bien sûr dérivable, mais ceci ne découle pas directement de l'application du théorème de dérivation sous l'intégrale. L'application du théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre ne pose certes pas de problème. Mais, pour tout $t \in [0,1]$ la fonction $x \mapsto |t-x|$ est dérivable en dehors de la partie λ-négligeable $\{t\}$ de $[0,1]$, c'est-à-dire sur l'ensemble $[0,1] \setminus \{t\}$. Quand t décrit l'intervalle $[0,1]$, les points de non-dérivabilité décrivent l'intervalle $[0,1]$ tout entier. Donc il n'existe pas de partie négligeable de $[0,1]$ (indépendante de t) en dehors de laquelle pour tout $t \in [0,1]$ la fonction $x \mapsto |t-x|$ serait dérivable.

c. Soit $t \in [0,1]$ et commençons par montrer que l'on peut définir $\int_{[0,1]} \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\,dx$. Pour tout $x \in [0,1]$, la fonction $s \mapsto |s-x|$ est de classe C^1 sur $[0,x[\cup]x,1]$; sa dérivée $g(s,x) = \frac{\partial f}{\partial t}(s,x)$ y est continue, donc intégrable. Quitte à prolonger cette dérivée en $s = x$, en posant par exemple $g(x,x) = 0$, on obtient une fonction $x \mapsto g(s,x)$ $\lambda(dx)$-intégrable sur $[0,1]$, dont on note l'intégrale, qui ne dépend pas du prolongement choisi pour g,

$$\int_{[0,1]} \frac{\partial f}{\partial t}(s,x)\,dx.$$

On veut montrer que, pour toute suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $[0,1]$ ayant t pour limite et telle que $s_n \neq t$ pour tout n, la suite numérique

$$\frac{F(s_n)-F(t)}{s_n-t} = \int_{[0,1]} \frac{f(s_n,x)-f(t,x)}{s_n-t}\,dx,$$

converge vers $\int_{[0,1]} \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\,dx$. Soit (s_n) une telle suite.

La fonction $s \mapsto f(s,x)$ étant dérivable en $s = t$ pour tout $x \in [0,1] \setminus \{t\}$ (donc pour presque tout x), la suite

$$\frac{f(s_n,x)-f(t,x)}{s_n-t}$$

converge simplement vers $\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)$ pour presque tout $x \in [0,1]$. D'autre part, on a

$$\left|\frac{f(s_n,x)-f(t,x)}{s_n-t}\right| \leq 1$$

pour tout n et pour tout $x \in [0,1]$. (Remarquons d'une part que cette estimation ne découle pas d'une simple application du théorème des accroissements finis puisque la fonction $s \mapsto f(s,x)$ n'est pas dérivable en $s = x$; d'autre part il aurait suffit que cette estimation soit satisfaite pour presque tout $x \in [0,1]$.) Donc d'après le théorème de convergence dominée la fonction h est dérivable et sa dérivée vaut $\int_{[0,1]} \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\,dx$.

11. Des questions de sommabilité. Soit f une fonction à valeurs complexes, intégrable par rapport à une mesure μ sur un espace mesurable $(E,\mathscr{E})$.

a. Soit $B_n = \{n-1 \leq |f| \leq n\}$. Montrer que $\mu(B_n) < \infty$ pour tout $n \geq 2$.

b. Montrer que

$$\sum_{n=2}^{\infty} n\mu(B_n) < \infty.$$

c. En écrivant, pour $N \geq 2$,

$$\sum_{n=2}^{N} \sum_{m=2}^{n} \frac{m^2}{n^2} \mu(B_m) = \sum_{m=2}^{N} \sum_{n=m}^{N} \frac{m^2}{n^2} \mu(B_m),$$

montrer que

$$\sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=2}^{n} \frac{m^2}{n^2} \mu(B_m) < \infty.$$

d. Montrer que, pour $n \geq 2$,

$$\int |f|^2 \mathbb{1}_{\{|f|<n\}} \, d\mu = \int |f|^2 \mathbb{1}_{\{|f|<1\}} \, d\mu + \sum_{m=2}^{n} \int |f|^2 \mathbb{1}_{B_m} \, d\mu.$$

e. En déduire que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int |f|^2 \mathbb{1}_{\{|f|<N\}} \, d\mu < \infty.$$

Correction.

a. Soit $n \geq 2$. On a

$$\mu(B_n) \leq \mu(\{n-1 \leq |f|\}) \leq \frac{1}{n-1} \int |f| \, d\mu < \infty$$

(l'avant-dernière dernière inégalité, qui est évidente, est l'inégalité de Bienaymé-Tchebitcheff).

b. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{\infty} n\mu(B_n) &= \sum_{n=2}^{\infty} \int_E n \mathbb{1}_{B_n} \, d\mu \quad \text{(chaque terme étant positif, ces sommes sont définies)} \\
&= \int_E \sum_{n=2}^{\infty} n \mathbb{1}_{B_n} \, d\mu \quad \text{(série à termes positifs)} \\
&\leq \int_E \sum_{n=2}^{\infty} (|f|+1) \mathbb{1}_{B_n} \, d\mu \quad \text{(par définition de } B_n\text{)} \\
&\leq \int_E (|f|+1) \mathbb{1}_{\{1 \leq |f| \leq +\infty\}} \, d\mu \\
&\leq \int_E |f| \, d\mu + \mu(\{|f| \geq 1\}) \quad \text{(croissance et linéarité de l'intégrale)} \\
&\leq 2 \int_E |f| \, d\mu \quad \text{(inégalité de Bienaymé-Tchebitcheff)} \\
&< \infty \quad \text{(par hypothèse sur } f \text{ et } \mu\text{)}.
\end{aligned}$$

c. Pour $N \geq m \geq 2$ on a

$$\sum_{n=2}^{N} \sum_{m=2}^{n} \frac{m^2}{n^2} \mu(B_m) = \sum_{m=2}^{N} \left(\sum_{n=m}^{N} \frac{1}{n^2} \right) m^2 \mu(B_m).$$

Or

$$\sum_{n=m}^{N} \frac{1}{n^2} \leq \sum_{n=m}^{N} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=m}^{N} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{m-1} - \frac{1}{N} \leq \frac{1}{m-1} \leq \frac{2}{m}.$$

Donc

$$\sum_{n=2}^{N} \sum_{m=2}^{n} \frac{m^2}{n^2} \mu(B_m) \leq 2 \sum_{m=2}^{N} m\mu(B_m) \leq 2 \sum_{m=2}^{\infty} m\mu(B_m) < \infty.$$

À la limite quand N tend vers ∞ on a

$$\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=2}^{n}\frac{m^2}{n^2}\mu(B_m)<\infty.$$

d. L'égalité cherchée est une conséquence directe du fait que

$$\mathbb{1}_{\{|f|<n\}}=\mathbb{1}_{\{|f|<1\}}+\sum_{m=2}^{n}\mathbb{1}_{B_n}.$$

e. Sur $\{|f|<1\}$ on a $|f|^2\leq|f|$, donc

$$\int|f|^2\mathbb{1}_{\{|f|<1\}}\,d\mu\leq\int|f|\mathbb{1}_{\{|f|<1\}}\,d\mu\leq\int|f|\,d\mu<\infty.$$

Donc il suffit de vérifier que $\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}\displaystyle\int|f|^2\mathbb{1}_{\{|f|<N\}}\,d\mu<\infty$. Sur B_m on a $|f|\leq m$, de sorte que $\int|f|^2\mathbb{1}_{B_m}\,d\mu\leq m^2\mu(B_m)$. De la question (d) il résulte :

$$\int|f|^2\mathbb{1}_{\{|f|<n\}}\,d\mu\leq\int|f|^2\mathbb{1}_{\{|f|<1\}}\,d\mu+\sum_{m=2}^{n}m^2\mu(B_m).$$

En utilisant la question (c) et le fait que $\sum_{n=2}^{\infty}1/n^2<\infty$, on voit que

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}\int|f|^2\mathbb{1}_{\{|f|<N\}}\,d\mu<\infty.$$

12. Le théorème ergodique de Birkhoff (1931). Soient $(E, \mathscr{E})$ un espace mesurable, $f : E \to E$ une application mesurable et μ une mesure de probabilité de E.

On suppose que μ est invariante : pour toute partie $A \in \mathscr{E}$, on a $f_*\mu(A) := \mu(f^{-1}(A)) = \mu(A)$. On suppose aussi que μ est ergodique : pour toute partie $A \in \mathscr{E}$ telle que $f^{-1}(A) = A$ on a $\mu(A) = 0$ ou 1.

Soit enfin $\psi : E \to \mathbb{R}$ une fonction μ-intégrable. Le but du problème est de montrer que pour μ-presque tout point $x \in E$ la moyenne des valeurs de ψ le long de l'orbite positive $x, f(x), f(f(x)), ...$ de x converge vers la moyenne de ψ :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \psi(f^k(x)) \to \int_E \psi \, d\mu \quad \text{quand } n \to +\infty.$$

a. Interpréter ce résultat lorsque ψ est la fonction indicatrice d'une partie $B \in \mathscr{E}$.

b. Dans le cas où E est l'ensemble fini $\{1, ..., p\}$, où $\mathscr{E} = \mathscr{P}(E)$, et où μ est la probabilité uniforme ($\mu(\{k\}) = 1/p$ quel que soit $k \in \{1, ..., p\}$), caractériser les permutations f pour lesquelles μ est ergodique.

c. En quoi le théorème de Birkhoff renforce-t-il le théorème de récurrence de Poincaré ?

Commençons par considérer une fonction auxiliaire $\varphi : E \to \mathbb{R}$ qui soit μ-intégrable. Notons

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi \circ f^k(x) \quad \text{et} \quad F_n(x) = \max\left(S_1(x), ..., S_n(x)\right).$$

d. Montrer que pour tout x on a

$$F_{n+1}(x) = \varphi(x) + \max\left(0, F_n \circ f(x)\right). \tag{2}$$

e. Montrer que la partie $A = \{x, F_n(x) \to +\infty\}$ est mesurable.

f. Montrer que A est invariante ($f^{-1}(A) = A$) en utilisant l'égalité (2). En déduire que A est négligeable ou de mesure pleine.

g. En utilisant encore l'identité (2), montrer que sur A la suite des fonctions $F_{n+1} - F_n \circ f$ tend simplement vers φ ; puis justifier soigneusement que

$$0 \leq \int_A (F_{n+1} - F_n)\, d\mu = \int_A (F_{n+1} - F_n \circ f)\, d\mu \to_{n\to+\infty} \int_A \varphi \, d\mu;$$

h. En déduire que si $\int_E \varphi \, d\mu < 0$, $\mu(A) = 0$.

i. En déduire que si $\int_E \varphi\, d\mu < 0$,

$$\limsup_n \frac{S_n}{n} \leq 0 \quad \mu\text{-presque partout.}$$

j. Montrer que quel que soit $\varepsilon > 0$ on a

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \psi \circ f^k \leq \int_E \psi\, d\mu + \varepsilon \quad \mu\text{-presque partout ;}$$

on pourra appliquer la question (i) à la fonction $\varphi = \psi - \int_E \psi d\mu - \varepsilon$.

Le même raisonnement appliqué à $-\psi$ montre que quel que soit $\varepsilon > 0$ on a

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \psi \circ f^k \geq \int_E \psi\, d\mu - \varepsilon \quad \mu\text{-presque partout.}$$

En faisant tendre ε vers 0 on voit que les limites inférieure et supérieure coïncident μ-presque partout, ce qui prouve le théorème annoncé.

Voici deux applications du théorème ergodique de Birkhoff à la Théorie des Nombres.

Considérons le cas particulier où E est l'intervalle $[0, 1[$ muni de la tribu borélienne, $f : [0, 1[\to [0, 1[$ l'application

$$x = 0, x_1x_2x_3... \mapsto 0, x_2x_3x_4... = 10\, x \pmod 1 = \text{partie décimale de } 10\, x,$$

et ψ la fonction indicatrice de la partie $B = [0, 1/10[$.

k. Montrer que la mesure de Lebesgue λ est invariante.

l. Montrer qu'il existe une orbite dense, c'est-à-dire qu'il existe un $x \in [0, 1[$ tel que l'adhérence de l'ensemble $\{f^k(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$ égale $[0, 1[$.

On admettra qu'alors λ est ergodique.

m. Caractériser les nombres $x = 0, x_1x_2x_3...$ tels que $f^k(x) \in [0, 1/10[$, puis interpréter en une phrase l'affirmation du théorème de Birkhoff dans cette situation.

n. (Difficile) Montrer que le chiffre de gauche du nombre 2^n, $n \in \mathbb{N}$, en base 10 est plus souvent un 7 qu'un 8. On admettra que si $f : [0, 1[\to [0, 1[$ est la rotation $x \mapsto x + \alpha \pmod 1$, avec $\alpha \notin \mathbb{Q}$, alors f est ergodique ; ceci sera démontré ultérieurement, en utilisant le Théorème d'injectivité de la Transformation de Fourier des mesures finies.

Correction.

a. Soit $\psi = \mathbb{1}_B$ la fonction caractéristique d'une partie $B \in \mathscr{E}$. On a $\psi \circ f^k(x) = 1$ si la k-ième image itérée de x est dans B, et $\psi \circ f^k(x) = 0$ sinon. La somme $\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_B \circ f^k(x)$ est égale au nombre de passages de la f-orbite de x dans B pendant l'intervalle de temps $[\![0, n-1]\!]$. La *somme de Birkhoff* $\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_B \circ f^k(x)/n$ est égale à la probabilité de passage de la f-orbite de x dans B pendant l'intervalle de temps $[\![0, n-1]\!]$.

Donc le théorème de Birkhoff affirme que si f est ergodique, pour presque tout x la fréquence à laquelle la f-orbite de x visite B est asymptotiquement égale à la mesure de B.

b. Dans le cas particulier indiqué, les permutations f pour lesquelles la probabilité uniforme est ergodique sont exactement les permutations possédant un cycle unique. En ce sens, l'ergodicité est une propriété d'indécomposabilité (qui ne tient pas compte d'éventuels sous-ensembles invariants négligeables).

c. Avec les mêmes notations que dans la question précédente, le théorème de Poincaré affirme que les itérées par f de presque tout $x \in B$ repasseront une infinité de fois par B ; autrement dit, que presque partout dans B la somme

$$\sum_{k=0}^{n} \psi(f^k(x))$$

tend vers l'infini quand n tend vers $+\infty$. Le théorème de Birkhoff est un renforcement considérable de ce résultat, puisqu'il donne une estimation quantitative de cette somme partielle.

d. On a

$$\begin{aligned}
F_{n+1}(x) &= \max\left(S_1(x), S_2(x), ..., S_{n+1}(x)\right) \\
&= \max\left(\varphi(x), \varphi(x) + \varphi(f(x)), ..., \varphi(x) + \varphi(f(x)) + ... + \varphi(f^{n+1}(x))\right) \\
&= \varphi(x) + \max\left(0, \varphi(f(x)), ..., \varphi(f(x)) + ... + \varphi(f^{n+1}(x))\right) \\
&= \varphi(x) + \max\left(0, F_n(f(x))\right).
\end{aligned}$$

e. On a

$$\begin{aligned}
A &= \{x, F_n(x) \to +\infty\} \\
&= \{x,\ \forall K \in \mathbb{N}\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N\ F_n(x) > K\} \\
&= \cap_{K \in \mathbb{N}} \cup_{N \in \mathbb{N}} \cap_{n > N} F_n^{-1}([K, +\infty[).
\end{aligned}$$

Or l'application f et la fonction φ sont mesurables, donc les fonctions F_n sont mesurables ; donc pour tout $n \geq 1$ et pour tout $K \in \mathbb{N}$ la partie $F_n^{-1}([K, +\infty[)$, image réciproque d'un borélien par une fonction mesurable, est dans la tribu $\mathscr{E}$. Donc la partie A elle-même, obtenue par intersections et unions dénombrables de telles parties, est dans $\mathscr{E}$.

f. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
x \in A &\Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} F_{n+1}(x) = +\infty \quad \text{(argument de suite extraite)} \\
&\Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} F_n(f(x)) = +\infty \quad \text{(d'après l'égalité de la question (d))} \\
&\Leftrightarrow f(x) \in A.
\end{aligned}$$

Donc $f^{-1}(A) = A$. En outre μ est ergodique. Donc A est de mesure nulle ou pleine.

g. Soit $x \in A = f^{-1}(A)$. Comme $f(x) \in A$, si n est assez grand on a $F_n(f(x)) \geq 0$ et, d'après la question (d),

$$F_{n+1}(x) = \varphi(x) + F_n(f(x))$$

(attention, en général ce rang n dépend de x). Donc la suite réelle $(F_{n+1}(x) - F_n \circ f(x))_n$ est stationnaire et sa limite vaut $\varphi(x)$. Donc la suite $(F_{n+1} - F_n \circ f)_n$ converge simplement vers φ sur A.

De plus on a

$$\begin{aligned}
F_{n+1} - F_n \circ \varphi - \varphi &= \max(0, F_n \circ \varphi) - F_n \circ \varphi \\
&= \begin{cases} -F_n \circ \varphi & \text{si } F_n \circ \varphi < 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Comme F_n est croissante, la suite $(g_n)_n = (F_{n+1} - F_n \circ \varphi - \varphi)_n$ est décroissante, et positive. Comme la fonction $F_2 - F_1 \circ \varphi - \varphi$ est intégrable, quitte à soustraire son intégrale à $(g_n)_n$, on a une suite négative décroissante. D'après le théorème de Beppo Levi,

$$\int_A (F_{n+1} - F_n \circ f)\, d\mu \to_n \int_A \varphi\, d\mu.$$

Par ailleurs, d'après la formule d'intégration par rapport à une mesure image, on a

$$\int_A F_n \circ f\, d\mu = \int_{f(A)} F_n\, d(f_*\mu)$$

(cf. le chapitre 2 d'exercices). Or A et μ sont invariantes : $f^{-1}(A) = A$ (donc $f(A) = A$) et $f_*\mu = \mu$. Donc

$$\int_A F_n \circ f\, d\mu = \int_A F_n\, d\mu.$$

Enfin, la suite de fonctions (F_n) est croissante. Par croissance de l'intégrale,

$$\int_A F_{n+1}\, d\mu \geq \int_A F_n\, d\mu.$$

On a montré :

$$0 \leq \int_A (F_{n+1} - F_n)\, d\mu = \int_A (F_{n+1} - F_n \circ f)\, d\mu \to_{n\to+\infty} \int_A \varphi\, d\mu.$$

h. Supposons que $\mu(A) \neq 0$. Comme on l'a vu, on a alors $\mu(A) = 1$. Donc $\int_E \varphi\, d\mu = \int_A \varphi\, d\mu$. D'après la question précédente, cette dernière quantité est positive. Par contraposition, si $\int_E \varphi\, d\mu < 0$, $\mu(A) = 0$.

i. Si $\int_E \varphi\, d\mu < 0$, A est négligeable donc $\mu(dx)$-presque partout x appartient à $A^c = E \setminus A$. Or, quelque soit $x \in A^c$, la suite croissante $(F_n(x))_n$ ne tend pas vers $+\infty$, donc est majorée par un certain réel M_x. Donc

$$\limsup_n \frac{F_n(x)}{n} \leq \limsup_n \frac{M_x}{n} = \lim_n \frac{M_x}{n} = 0.$$

Comme $S_n(x) \leq F_n(x)$,

$$\limsup_n S_n(x)/n \leq 0.$$

j. Posons $\varphi = \psi - \int_E \psi\, d\mu - \varepsilon$. On a $\int_E \varphi\, d\mu = -\varepsilon < 0$. Donc d'après la question précédente,

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(f^k(x)) \leq 0 \quad \mu(dx)\text{-presque partout},$$

soit

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \psi(f^k(x)) \leq \int_E \psi\, d\mu + \varepsilon \quad \mu(dx)\text{-presque partout}.$$

Considérons le cas particulier où E est l'intervalle $[0,1[$ muni de la tribu borélienne, $f : [0,1[\to [0,1[$ l'application $x = 0, x_1x_2x_3... \mapsto 0, x_2x_3x_4...$ et ψ la fonction indicatrice de la partie $B = [0, 1/10[$.

k. Soit $[a,b]$ un intervalle de $[0,1[$. Son image réciproque par f est

$$f^{-1}([a,b]) = \{0, ix_1x_2...,\ i \in \{0,...,9\},\ 0, x_1x_2... \in [a,b]\}.$$

Elle est donc l'union disjointe des dix intervalles $[0, ia_1a_2...; 0, ib_1b_2...]$, $i = 0,...,9$. Donc sa mesure de Lebesgue est $10(b-a)/10 = b - a = \lambda([a,b])$. Donc $f_*\lambda = \lambda \circ f^{-1}$ coïncide avec λ sur le π-système formé par les intervalles. De plus, $f_*\lambda$ est invariante par translation. D'après le théorème d'unicité de la mesure de Lebesgue, $f_*\lambda = \lambda$.

l. Considérons le réel x obtenu en juxtaposant d'abord chaque chiffre $0, 1, 2, ..., 9$, puis chaque mot à deux lettres, c'est-à-dire chaque nombre compris entre 0 et 99, puis chaque mot à trois lettres, etc. Les images itérées de ce réel x par f passent arbitrairement près de n'importe quel réel ; donc l'orbite de x est dense.

m. Les nombres $x = 0, x_1x_2x_3...$ tels que $f^k(x) = 0, x_{k+1}x_{k+2}... \in [0, 1/10[$ sont les nombres tels que $x_{k+1} = 0$. Le théorème de Birkhoff affirme que pour λ-presque tout x, le chiffre 0 revient dans le développement décimal de x avec la fréquence asymptotique $\lambda([0, 1/10[) = 1/10$.

Ce raisonnement peut être fait avec chacun des dix chiffres $0, ..., 9$. On a ainsi prouvé que pour presque tout nombre $x \in [0, 1[$ la fréquence de chacun des dix chiffres dans son développement décimal est $1/10$. Les tels nombres sont qualifiés de *normaux*. On ne sait pas, par exemple, si π est normal ou anormal.

n. Le chiffre de gauche de 2^n est $p \in \{1, ..., 9\}$ ssi $\log_{10} 2^n \pmod 1 \in [\log_{10} p, \log_{10}(p+1)[$. D'autre part, l'application $a \mapsto 2a$ "lue" dans la variable $x = \log_{10} a$ est $x \mapsto x + \log_{10} 2$. Considérons donc l'application

$$f : \begin{array}{ll} [0,1[& \to [0,1[\\ x & \mapsto x + \log_{10} 2 \pmod 1). \end{array}$$

L'application f est une translation, donc préserve la mesure de Lebesgue.

Remarquons par ailleurs que $\alpha = \log_{10} 2$ est irrationnel (parce qu'une puissance de 2 n'est jamais divisible par 10), et montrons que pour cette raison l'application f est ergodique relativement à la mesure de Lebesgue. Soit A un borélien de $[\log_{10} 2, 1[$ qui soit f-invariant.

Comme $A = f^{-1}(A)$ on a $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_{f^{-1}(A)}$. Or $\mathbb{1}_{f^{-1}(A)} = \mathbb{1}_A \circ f$. Notons c_n, $n \in \mathbb{Z}$, les coefficients de Fourier de $\mathbb{1}_A$:

$$c_n = \int_0^1 \mathbb{1}_A(x) e^{-i2\pi nx}\, dx.$$

Ceux de $\mathbb{1}_A \circ f$ valent alors

$$\int_0^1 \mathbb{1}_A(x+\alpha) e^{-i2\pi nx}\, dx = c_n e^{i2\pi n\alpha}$$

(dans l'intégrale, on a considère en fait le prolongement de $\mathbb{1}_A$ en une fonction 1-périodique sur $\mathbb{R}$). Par injectivité des coefficients de Fourier (ce résultat sera revu dans le chapitre sur la transformation de Fourier), pour tout $k \in \mathbb{Z}$ on a

$$\left(1 - e^{i2\pi n\alpha}\right) c_n = 0.$$

Comme α est irrationnel, $n\alpha$ n'est entier que pour $n = 0$. Donc pour tout $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ on a $c_n = 0$. Donc $\mathbb{1}_A$ est constante presque partout. C'est dire que A est négligeable ou de mesure totale 1. Donc f est ergodique, comme toute translation irrationnelle sur le cercle $[0, 1[$.

Donc le théorème de Birkhoff s'applique, notamment à la fonction indicatrice de chacun des deux ensembles $B = [\log_{10} 7, \log_{10} 8[$ et $C = [\log_{10} 8, \log_{10} 9[$: dx-presque partout, les fréquences asymptotiques de passage de $x + n\log_{10} 2 \pmod 1$ dans B et dans C sont dans un rapport de

$$\frac{dx(B)}{dx(C)} = \frac{\log_{10} 8 - \log_{10} 7}{\log_{10} 9 - \log_{10} 8} > 1.$$

Mais par symétrie ceci est vrai pour tout $x \in [0, 1[$, et en particulier pour $x = \log_{10} 1 = 0$. Ceci signifie précidément que le chiffre de gauche de 2^n est plus souvent un 7 qu'un 8.

13. Inégalité de Jensen et entropie d'une partition. Soient μ une probabilité sur $(E, \mathscr{E})$, $\phi :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction convexe avec $-\infty \le a < b \le +\infty$ et $f : E \to]a, b[$ une fonction intégrable relativement à μ.

a. Prouver l'*inégalité de Jensen* :

$$\phi\left(\int f\, d\mu\right) \le \int \phi(f)\, d\mu \ ;$$

on pourra utiliser le fait que le graphe d'une fonction convexe est l'enveloppe supérieure des fonctions affines qu'elle domine.

b. Écrire cette inégalité en termes de la probabilité image $f_*\mu$.

c. En déduire l'*inégalité de Jensen finie*, obtenue dans le cas particulier où $E =]a,b[$, $\mathscr{E} = \mathscr{B}(]a,b[)$, $f(x) = x$ et $\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_{x_i}$, δ_x désignant la mesure de Dirac en x et les α_i étant des réels tels que $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$.

Soit $\mathscr{A}$ une partition mesurable finie d'un espace de probabilité $(F, \mathscr{F}, \nu)$; mesurable signifie que $\mathscr{A} \subset \mathscr{E}$. On rappelle que l'*entropie* de $\mathscr{A}$ est le réel éventuellement infini

$$H(\mathscr{A}) = -\sum_{A\in\mathscr{A}} \nu(A) \ln \nu(A),$$

(voir l'exercice du Chap. 1), avec la convention $0 \ln 0 = 0$.

d. Interpréter $H(\mathscr{A})$ comme l'intégrale sur E d'une certaine fonction $I_{\mathscr{A}}$ associée à $\mathscr{A}$, mesurable et à valeurs dans $[0, +\infty]$ ($I_{\mathscr{A}}$ est la *fonction d'information* de $\mathscr{A}$). En déduire une formule pour l'entropie d'une partition mesurable quelconque.

e. Le nombre fini $n \in \mathbb{N}_*$ de parties $A \in \mathscr{A}$ étant fixé, montrer que l'entropie de $\mathscr{A}$ est maximale si toutes les parties $A \in \mathscr{A}$ ont même mesure ; on pourra utiliser l'inégalité de Jensen finie.

Correction.

a. D'abord, comme toute fonction convexe, ϕ est continue donc mesurable.

D'autre part, toujours parce que ϕ est convexe, son graphe est l'enveloppe supérieure des droites affines qu'elle majore ; si I est l'ensemble de ces droites affines et si pour tout $i \in I$ la i-ième droite affine a pour équation $z = a_i y + b_i$, la fonction ϕ s'écrit

$$\phi(y) = \sup_{i\in I}(a_i y + b_i).$$

Soit $i \in I$. Comme f est μ-intégrable, par linéarité la fonction $x \mapsto a_i f(x) + b_i$ est μ-intégrable. Par ailleurs,

$$a_i f(x) + b_i \leq \phi(f(x)).$$

Ceci implique que la partie négative $(\phi \circ f)^-$ de $\phi \circ f$ est majorée par celle $(a_i f(x) + b_i)^-$ de $a_i f(x) + b_i$, qui est finie. Donc $\phi \circ f$ possède une intégrale (mais elle n'est pas forcément intégrable).

Par croissance de l'intégrale on a donc pour tout $i \in I$

$$a_i \left(\int f \, d\mu \right) + b_i \leq \int \phi(f(x)) \, d\mu.$$

Donc

$$\phi \left(\int f \, d\mu \right) \leq \int \phi(f) \, d\mu.$$

b. Notons ν la probabilité image de μ par f. D'après la formule d'intégration par rapport à une mesure image on obtient

$$\phi \left(\int_{]a,b[} x \, d\nu \right) \leq \int_{]a,b[} \phi \, d\nu \ ;$$

autrement dit, la valeur de ϕ au centre de masse du segment $]a,b[$ (pour la répartition de masse ν) est inférieure à la moyenne de ϕ sur $]a,b[$. (C'est sous cette forme que l'inégalité de Jensen se comprend le mieux parce que μ et f n'y jouent séparément aucun rôle particulier : seule compte ν.)

c. En particulier si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ on obtient

$$\phi(\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 \phi(x_1) + ... + \alpha_n \phi(x_n) \ ;$$

autrement dit, la valeur de la fonction convexe ϕ en la moyenne pondérée de n points est inférieure à la moyenne pondérée des valeurs de ϕ en ces points.

d. $H(\mathscr{A}) = -\sum_{A\in\mathscr{A}} \mu(A)\ln\mu(A)$ est l'intégrale de la fonction étagée $I_{\mathscr{A}}$ définie sur E par $I_{\mathscr{A}}(x) = -\ln\mu(\bar{x})$, où $\bar{x} \in \mathscr{A}$ est la classe de la partition contenant x. La formule

$$H(\mathscr{A}) = \int I_{\mathscr{A}}\, d\mu,$$

garde un sens pour toute partition mesurable puisqu'elle définit $H(\mathscr{A})$ comme l'intégrale d'une fonction mesurable positive.

e. Notons ϕ la fonction définie par $\phi(x) = x\ln x$ si $x > 0$ et $\phi(0) = 0$. Cette fonction est strictement convexe parce que sa dérivée seconde sur $]0, +\infty[$ est strictement positive. L'entropie de $\mathscr{A}$ vérifie

$$\begin{aligned} H(\mathscr{A}) &= -\sum_{A\in\mathscr{A}} \phi(\nu(A)) = -n\left(\frac{1}{n}\sum_{A\in\mathscr{A}} \phi(\nu(A))\right) \\ &\leq -n\phi\left(\frac{1}{n}\sum_{A\in\mathscr{A}} \nu(A)\right) \quad \text{(d'après l'inégalité de Jensen finie)} \\ &\leq -n\phi\left(\frac{1}{n}\right) = \ln n. \end{aligned}$$

Or $\ln n$ est précisément l'entropie des partitions à n éléments A de mesures identiques $\nu(A) = 1/n$. N.B. : Comme ϕ est strictement convexe, on peut montrer que cette valeur maximale est atteinte uniquement pour de telles partitions.

CHAPITRE 4

Produits de mesures

Sommaire

1. Questions élémentaires.

a. Donner un exemple, si E est un ensemble de cardinal supérieur à 2, de partie mesurable de $E \times E$ qui ne soit pas un rectangle.
b. Donner un exemple de mesure μ sur $(\mathbb{R}^2, \mathscr{R}^{\otimes 2})$ qui ne soit pas le produit tensoriel de deux mesures sur $(\mathbb{R}, \mathscr{R})$.

Correction.
a. Soient x et y deux éléments distincts de E. La partie $A = \{(x,x),(y,y)\}$ n'est pas un rectangle : si on avait $A = A_1 \times A_2$, on aurait $x \in A_1$ (parce que $(x,x) \in A$) et $y \in A_2$ (parce que $y \in A_2$), alors que $(x,y) \notin A$.
b. Soient x, y et z les trois points de $\mathbb{R}^2$ définis par $x = (0,0)$, $y = (1,0)$ et $z = (0,1)$. Considérons la mesure $\mu = \delta_x + \delta_y + \delta_z$, somme des mesures de Dirac de $\mathbb{R}^2$ en les points x, y et z et supposons qu'il existe deux mesures α et β de $\mathbb{R}$ telles que $\mu = \alpha \otimes \beta$. En écrivant la mesure des singletons et des paires inclus dans $\{x,y,z\}$ on voit que forcément $\alpha(\{0\}) = \alpha(\{1\}) = \beta(\{0\}) = \beta(\{1\}) = 1$. Or ceci est incompatible avec le fait que $\mu(\{1,1\}) = 0$.

2. Carré de la mesure de comptage.

a. Montrer que $\mathscr{P}(\mathbb{N}) \otimes \mathscr{P}(\mathbb{N}) = \mathscr{P}(\mathbb{N}^2)$.
b. Soit μ la mesure de comtage de $\mathbb{N}$. Montrer que $\mu \otimes \mu$ est la mesure de comptage de $\mathbb{N}^2$.

Correction.

a. La tribu $\mathscr{P}(\mathbb{N}) \otimes \mathscr{P}(\mathbb{N})$ est évidemment incluse dans $\mathscr{P}(\mathbb{N}^2)$. Réciproquement, $\mathbb{N}^2$ étant dénombrable, toute partie A de $\mathbb{N}^2$ est la réunion disjointe au plus dénombrable de ses singletons. Or tout singleton de $\mathbb{N}^2$ s'écrit $\{(m,n)\} = \{m\} \times \{n\}$, ce qui prouve que $\{(m,n)\} \in \mathscr{P}(\mathbb{N}) \otimes \mathscr{P}(\mathbb{N})$. Donc $\mathscr{P}(\mathbb{N}^2) \subset \mathscr{P}(\mathbb{N}) \otimes \mathscr{P}(\mathbb{N})$. Par conséquent, $\mathscr{P}(\mathbb{N}^2) = \mathscr{P}(\mathbb{N}) \otimes \mathscr{P}(\mathbb{N})$.
b. Pour tout singleton $\{(m,n)\} = \{m\} \times \{n\}$, on a

$$\mu \otimes \mu(\{(m,n)\}) = \mu(\{m\})\mu(\{n\}) = 1.$$

Donc, si $A \in \mathscr{P}(\mathbb{N}) \otimes \mathscr{P}(\mathbb{N})$, on a

$$\mu \otimes \mu(A) = \sum_{(m,n)\in A} \mu \otimes \mu\{(m,n)\} = \sum_{(m,n)\in A} 1 = \text{Card(A)}.$$

3. Un contre-exemple au théorème de Fubini. Soient λ la mesure de Lebesgue de $[0,1]$ sur la tribu borélienne $\mathscr{B} = \mathscr{B}([0,1])$ et μ la mesure de comptage de $[0,1]$ sur $\mathscr{P} = \mathscr{P}([0,1])$. Notons $\Delta = \{(x,x), x \in [0,1]\}$ la diagonale de $[0,1]^2$.
a. Montrer que $\Delta \in \mathscr{B} \otimes \mathscr{P}$.
b. Calculer les intégrales itérées de la fonction indicatrice de Δ,

$$\int \left(\int \mathbb{1}_\Delta(x,y)\, d\lambda(x) \right) d\mu(y) \quad \text{et} \quad \int \left(\int \mathbb{1}_\Delta(x,y)\, d\mu(y) \right) d\lambda(x).$$

c. Expliquer.

Correction.
a. Par définition de la tribu produit, les applications coordonnées $(x,y) \mapsto x$ et $(x,y) \mapsto y$ sont mesurables de $([0,1]^2, \mathscr{B}\otimes\mathscr{P})$ dans $([0,1], \mathscr{B})$ et $([0,1], \mathscr{P})$ respectivement. A fortiori $(x,y) \mapsto y$ est aussi mesurable de $([0,1]^2, \mathscr{B}\otimes\mathscr{P})$ dans $([0,1], \mathscr{B})$. Donc la fonction $(x,y) \mapsto x-y$, composée des deux projections mesurables précédentes et de l'application borélienne (parce que continue) $([0,1]^2, \mathscr{B}\otimes\mathscr{B}) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$, $(x,y) \mapsto x-y$, est mesurable. Donc la diagonale $\Delta = \{x-y=0\}$, image réciproque du borélien $\{0\}$ par cette dernière application mesurable, est dans $\mathscr{B} \otimes \mathscr{P}$.
b. Pour $y \in [0,1]$ on a $\int \mathbb{1}_A(x,y)\, \lambda(dx) = \lambda(\{y\}) = 0$, donc

$$\int \mu(dy) \left(\int \lambda(dx) \mathbb{1}_A(x,y) \right) = 0.$$

D'autre part, pour $x \in [0,1]$ on a $\int \mathbb{1}_A(x,y)\, \mu(dy) = \mu(\{x\}) = 1$, donc

$$\int \lambda(dx) \left(\int \mu(dy) \mathbb{1}_A(x,y) \right) = 1.$$

c. Bien que la fonction $\mathbb{1}_A$ soit mesurable et positive, on ne peut pas appliquer le théorème de Fubini parce que μ n'est pas une mesure σ-finie.

4. Mesure d'un graphe. Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne et soit $\Gamma = \{(x, f(x)),\ x \in \mathbb{R}^d\}$ son graphe.
a. Montrer que Γ est une partie borélienne de $\mathbb{R}^{d+1}$.
b. Montrer que Γ est Lebesgue-négligeable dans $\mathbb{R}^{d+1}$.

Correction.
a. Soit

$$\phi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto f(x) - y.$$

Cette fonction est borélienne et $\Gamma = \phi^{-1}(\{0\})$, donc Γ est borélien.

b. La foncttion $\mathbb{1}_\Gamma$ est borélienne et positive et la mesure de Lebesgue λ de $\mathbb{R}^{d+1}$ est σ-finie. D'après le théorème de Fubini on a donc :

$$\begin{aligned}
\lambda(\Gamma) &= \int_{\mathbb{R}^{d+1}} \mathbb{1}_\Gamma(x_1, ..., x_d, y)\, dx_1 \dots dx_d\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_\Gamma(x_1, ..., x_d, y)\, dy \right) dx_1 \dots dx_d \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} dy(\{f(x_1, ..., x_d)\})\, dx_1 \dots dx_d \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} 0\, dx_1 \dots dx_d = 0.
\end{aligned}$$

Donc Γ est λ-négligeable dans $\mathbb{R}^{d+1}$: ceci généralise le fait que la longueur d'un point (cas $d = 0$, avec la convention que $\mathbb{R}^0 = \{0\}$), la surface d'une courbe (cas $d = 1$) ou le volume d'une surface (cas $d = 2$) sont nuls.

N.B. : Par exemple le graphe d'une fonction continue $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ est d'aire nulle. Mais ceci ne se généralise pas à l'image d'une courbe paramétrée continue $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ qui n'est pas un graphe. Peano a en effet démontré qu'il existe de telles courbes γ qui sont surjectives dans $[0, 1]^2$, donc dont l'aire de l'image vaut 1 (ou n'importe quelle réel positif). En revanche, si γ est dérivable, c'est une conséquence du théorème des accroissements finis que son image est de mesure nulle (version préliminaire du théorème de Sard).

5. Applications du théorème de Fubini.

a. Étudier l'intégrabilité de

$$f(x, y) = \frac{1}{(1 + x + y)^\alpha}$$

sur $[0, +\infty[^2$ en fonction du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$, et calculer l'intégrale de f dans les cas où cette intégrale est finie.

b. Utiliser le fait que $1/x = \int_0^\infty e^{-xt}\, dt$ pour montrer que

$$\lim_{a \to \infty} \int_0^a \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

Puis montrer que pourtant la fonction $\sin x/x$ n'est pas intégrable sur $[0, +\infty[$; on pourra, en raisonnant par l'absurde, en déduire que $\sin^2 x/x$ serait elle-même intégrable, et montrer que ceci conduit à une contradiction.

c. Soient $0 < a < b$ deux réels et soit f la fonction réelle sur $[0, 1] \times [a, b]$ définie par $f(x, y) = x^y$. On muni $[0, 1] \times [a, b]$ de la tribu borélienne. Montrer que f est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue et en déduire la valeur de

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\, dx.$$

d. Pour tout $y \in]0,+\infty[$, notons $[y]$ la partie entière de y, $q(y) = [y/\pi]+1$ et $r(y) = y - [y/\pi]\pi$. Soit $f : \mathbb{R}_*^{+2} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = e^{-xq(y)^2\sqrt{r(y)}}.$$

La fonction f est-elle intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur $]0,+\infty[^2$? (On pourra même calculer son intégrale en utilisant le fait que $\sum_{n\geq 1} n^{-2} = \pi^2/6$.)

e. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, soit $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f_\alpha(x,y) = e^{-x^2-\alpha xy-y^2}$. Déterminer les valeurs de α pour lesquelles f_α est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$ et, quand elle est intégrable, calculer son intégrale I_α en utilisant le fait que $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$.

f. Calculer

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx\ ;$$

on pourra utiliser l'astuce qui consiste à élever cette intégrale au carré, à convertir par application du théorème de Fubini le résultat en une intégrale sur $\mathbb{R}^2$, puis à passer en coordonnées polaires.

Correction.

a. La fonction f est borélienne et positive. Par le théorème de Fubini on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}_+}\left(\int_{\mathbb{R}_+}\frac{1}{(1+x+y)^\alpha}\,dx\right)dy.$$

Or, pour tout $y \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}_+}(1+x+y)^{-\alpha}\,dx < \infty$ équivaut à $\alpha > 1$. Donc f n'est pas intégrable si $\alpha \leq 1$. Si $\alpha > 1$, pour tout $y \geq 1$ on a

$$\int_{\mathbb{R}_+}\frac{1}{(1+x+y)^\alpha}\,dx = \frac{1}{\alpha-1}(1+y)^{1-\alpha}.$$

Or, la fonction $y \mapsto (1+y)^{1-\alpha}$ est intégrable si et seulement si $\alpha - 1 > 1$, c'est-à-dire si $\alpha > 2$. D'après le théorème de Fubini, f est donc intégrable sur $\mathbb{R}_+^2$ si et seulement si $\alpha > 2$, auquel cas

$$\int_{\mathbb{R}_+^2}\frac{1}{(1+x+y)^\alpha}\,dx\,dy = \frac{1}{(\alpha-1)(\alpha-2)}.$$

b. L'égalité $1/x = \int_0^\infty e^{-xt}\,dt$ implique, par linéarité de l'intégrale, que l'on a

$$\int_0^a \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^a\left(\int_0^\infty e^{-xt}\sin x\,dt\right)dx.$$

La fonction $(x,t) \mapsto e^{-xt}\sin x$ est intégrable sur $[0,a]\times[0,+\infty[$ parce que l'intégrale de sa valeur absolue est finie :

$$\int_{[0,a]\times[0,+\infty[} |e^{-xt}\sin x|\,dt\,dx$$

$$= \int_0^a\left(\int_0^\infty |e^{-xt}\sin x|\,dt\right)dx \quad \text{(théorème de Fubini pour les fonctions positives)}$$

$$= \int_0^a \frac{|\sin x|}{x}\,dx,$$

où $x \mapsto |\sin x|/x$ est une fonction continue sur $[0,a]$, donc bornée, donc intégrable.

Donc, d'après le théorème de Fubini on a

$$\int_0^a \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^\infty \left(\int_0^a e^{-xt}\sin x\,dx\right)\,dt.$$

Or, deux intégrations par parties montrent que

$$\int_0^a e^{-xt}\sin x\,dx = \frac{1 - e^{-at}(\cos a + t\sin a)}{1+t^2}.$$

Notons $f_a(t)$ cette expression. Comme on veut faire tendre a vers $+\infty$, on peut supposer que $a \geq 1$. La fonction f_a satisfait alors l'estimation :

$$|f_a(t)| \leq \frac{1}{1+t^2}\left(1 + e^{-t}(1+t)\right) \leq \frac{3}{1+t^2} \quad \text{sur } \mathbb{R}^+.$$

De plus, f_a tend simplement vers $t \mapsto 1/(1+t^2)$ sur $]0,+\infty[$, donc dt-presque partout sur $[0,+\infty[$. Donc d'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{a\to+\infty}\int_0^a \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = [\operatorname{Arctan} t]_0^\infty = \pi/2.$$

On dit que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \sin x/x\,dx$ est *semi-convergente* en $+\infty$.

Mais la fonction $\sin x/x$ n'en est pas intégrable pour autant. Supposons en effet par l'absurde qu'elle le soit. Comme $|\sin x| \geq \sin^2 x$, a fortiori

$$\frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1-\cos 2x}{2x}$$

serait intégrable. On voit comme précédemment que $\int_0^\infty (\cos 2x)/(2x)\,dx$ serait semi-convergente en $+\infty$. Par différence l'intégrale de $1/2x$ serait semi-convergente, ce qui est faux. Donc la fonction $\sin x/x$ n'est pas intégrable, ce qui interdit d'appliquer directement le théorème de convergence dominée à la famille de fonctions $x \mapsto \sin x/x\mathbb{1}_{[0,a]}(x)$, qui pourtant tend simplement vers $x \mapsto \sin x/x$. En effet, cette famille n'est dominée, en valeur absolue et uniformément en a, par aucune fonction intégrable (sinon $x \mapsto \sin x/x$ serait intégrable). C'est l'introduction du facteur e^{-at} et le théorème de Fubini qui résolvent le problème, et c'est finalement à l'intégrale $\int_0^\infty f_a(t)\,dt$ que l'on applique le théorème de convergence dominée. À méditer !

c. La fonction f est continue sur $[0,1]\times[a,b]$, donc borélienne ; elle est aussi positive. D'après le théorème de Fubini,

$$\int_{[0,1]\times[a,b]} x^y\,dx\,dy = \int_{[a,b]}\left(\int_{[0,1]} x^y\,dx\right)\,dy = \int_{[a,b]} \frac{1}{y+1}\,dy = \ln\left(\frac{b+1}{a+1}\right).$$

Donc f est intégrable.

Intégrons maintenant dans l'ordre inverse :

$$\int_{[a,b]} f(x,y)\,dy = \frac{x^b - x^a}{\ln x}$$

dx-presque partout sur $[0,1]$ (plus précisément : partout sur $]0,1]$). Donc d'après le théorème de Fubini $x \mapsto (x^b - x^a)/\ln x$ est intégrable sur $[0,1]$ et

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\,dx = \int_{[0,1]\times[a,b]} x^y\,dx\,dy = \ln\left(\frac{b+1}{a+1}\right).$$

d. La fonction f est borélienne et positive. Donc d'après le théorème de Fubini on a

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} f\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}_+}\left(\int_{\mathbb{R}_+} \exp\left(-xq(y)^2\sqrt{r(y)}\right)\,dx\right)\,dy.$$

Si $y \notin \{n\pi,\ n \in \mathbb{N}_*\}$, alors

$$\int_{\mathbb{R}_*} \exp\left(-xq(y)^2\sqrt{r(y)}\right)\,dx = \frac{1}{q(y)^2\sqrt{r(y)}}.$$

Si $y \in \{n\pi,\ n \in \mathbb{N}_*\}$, $\int_{\mathbb{R}_*} \exp\left(-xq(y)^2\sqrt{r(y)}\right) dx = +\infty$. Mais comme $\{n\pi,\ n \in \mathbb{N}_*\}$ est Lebesgue-négligeable, il vient

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}_+^2} f\,dx\,dy &= \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{q(y)^2\sqrt{r(y)}}\,dy \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{](n-1)\pi,n\pi[} \frac{1}{q(y)^2\sqrt{r(y)}}\,dy \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{](n-1)\pi,n\pi[} \frac{1}{n^2\sqrt{r(y)}}\,dy.
\end{aligned}$$

Pour chaque $n \geq 1$, en faisant un changement de variable $h(y) = y + (n-1)\pi$ (h étant un difféomorphisme de $]0,\pi[$ dans $](n-1)\pi, n\pi[$), on a

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} f\,dx\,dy = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{]0,\pi[} \frac{1}{n^2\sqrt{y}}\,dy = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sqrt{\pi}}{n^2} < \infty.$$

Plus précisément, comme $\sum_{n\geq 1} 1/n^2 = \pi^2/6$ (ce fait se montre par exemple en appliquant le théorème de Parseval sur les séries de Fourier pour une fonction périodique bien choisie), l'intégrale de f vaut $\pi^2\sqrt{\pi}/3$).

e. Remarquons que $x^2 + \alpha xy + y^2 = (1 - \frac{\alpha^2}{4})y^2 + (x + \frac{\alpha}{2}y)^2$. Donc d'après le théorème de Fubini pour les fonctions positives,

$$I_\alpha = \int_{\mathbb{R}} e^{(1-\frac{\alpha^2}{4})y^2} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-(x+\frac{\alpha}{2}y)^2}\,dx\right) dy.$$

Pour tout $y \in \mathbb{R}$ on fait le changement de variables $x \mapsto x - \frac{\alpha}{2}y$, pour obtenir

$$I_\alpha = \sqrt{\pi}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{(1-\frac{\alpha^2}{4})y^2}\,dy\right) ;$$

on a utilisé l'égalité classique $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$.

Si $\alpha^2 \geq 4$, on a $e^{(1-\frac{\alpha^2}{4})y^2} \geq 1$ sur $\mathbb{R}$, ce qui implique $I_\alpha = +\infty$.

Si au contraire $\alpha < 4$, on effectue un nouveau changement de variables, $y \mapsto y/\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{4}}$, pour obtenir :

$$I_\alpha = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{1-\dfrac{\alpha^2}{4}}} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}\,dy = \frac{2\pi}{\sqrt{4-\alpha^2}} = \frac{2I_0}{\sqrt{4-\alpha^2}}.$$

f. Notons $I = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx$. Comme la fonction $(x,y) \mapsto e^{-x^2-y^2}$ est continue, elle est borélienne ; elle est en outre positive. Donc, par linéarité et d'après le théorème de Fubini on a

$$I^2 = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}\,dy\right) = \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2-y^2}\,dx\right) dy = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy.$$

Maintenant, l'application *coordonnées polaires*,

$$\begin{array}{rccl}
h: &]0,+\infty[\times]0,2\pi[& \to & \mathbb{R}^2 \setminus ([0,+\infty[\times\{0\}) \\
& (r,\theta) & \mapsto & (r\cos\theta, r\sin\theta),
\end{array}$$

est un difféomorphisme. Comme le demi-axe réel positif $[0,+\infty[\times\{0\}$ est de mesure nulle dans le plan et comme le jacobien de h vaut r, la formule du changement de variable montre que l'on a

$$I^2 = \int_{]0,+\infty[\times]0,2\pi[} e^{-r^2} r\,dr\,d\theta,$$

soit, en appliquant le théorème de Fubini une fois de plus,

$$I^2 = \left(\int_0^\infty e^{-r^2} r\,dr\right)\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right) = \pi.$$

Finalement on a montré :

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

6. Calculs de volumes de solides.

a. Calculer le volume de l'ellipsoïde solide de demi grands axes a, b et c ; on rappelle que ce solide a pour équation $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2 \leq 1$.

b. Pour $a > r > 0$, calculer le volume du tore solide $\hat{A}$ obtenu par révolution autour de l'axe des z de

$$A = \{(y,z) \ : \ (y-a)^2 + z^2 \leq r^2\}.$$

c. Soit A un borélien du demi-plan (y,z), $y \geq 0$. Montrer que l'ensemble $\hat{A}$ de $\mathbb{R}^3$ obtenu en le faisant tourner autour de l'axe Oz est borélien et que son volume vaut

$$V = 2\pi \int_A y\,dy\,dz.$$

d. Calculer les moments d'inertie principaux de l'ellipsoïde plein, en supposant que la répartition de masse est uniforme. On rappelle que le moment d'inertie de l'ellipsoïde par rapport à l'axe des z, par exemple, est le nombre

$$I_z = \int_E r^2\,dx\,dy\,dz,$$

où $r = \sqrt{x^2+y^2}$ est la distance à l'axe des z.

e. Calculer le volume de la boule $\mathbb{B}^n$ de rayon 1 en dimension n ; on pourra faire une récurrence sur la dimension.

Correction.

a. Considérons l'application

$$\begin{array}{llll} h: &]0,1[\times]0,\pi[\times]0,2\pi[& \to & \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z)\} \\ & (\rho,\theta,\varphi) & \mapsto & (x,y,z) = (a\rho\sin\theta\cos\varphi, b\rho\sin\theta\sin\varphi, c\rho\cos\theta), \end{array}$$

qui généralise l'application *coordonnées sphériques* (obtenue en prenant $a = b = c = 1$). C'est un difféomorphisme, son jacobien vaut $-abc\rho^2\sin\theta$ et le complémentaire de son image dans $\mathbb{R}^3$ est négligeable. Donc d'après la formule du changement de variable le volume de l'ellipsoïde E donné dans l'énoncé est

$$V = \int_E dx\,dy\,dz = abc \int_{]0,1[\times]0,\pi[\times]0,2\pi[} \rho^2 \sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi.$$

À ce stade, il est crucial de vérifier que l'on prend bien la valeur absolue du jacobien. De la façon dont nous avons défini le changement de variables, l'angle θ varie entre 0 et π, donc $\sin\theta$ est positif. Mais on aurait pu choisir de faire varier θ entre 0 et 2π (et donc φ entre 0 et π) ; il aurait alors fallu couper l'intégrale en deux, et écrire $\sin\theta$ ou $-\sin\theta$ selon que $\sin\theta$ est positif ou négatif.

Le théorème de Fubini permet de terminer le calcul :

$$V = abc \int_0^1 \rho^2\,d\rho \int_0^\pi \sin\theta\,d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{4}{3}\pi abc.$$

b. Pour calculer le volume
$$V = 2\pi \int_A y\, dy\, dz,$$
du tore, on peut considérer le changement de variables
$$\begin{array}{rccl} k: &]0,r[\times]0,2\pi[& \to & A \setminus (\{(y,0), a \le y \le a+r\}) \\ & (\rho,\theta) & \mapsto & (a+\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \end{array}$$
obtenu à partir des coordonnées polaires par translation de a dans la direction de y. On peut appliquer le théorème de Fubini pour les mêmes raisons que dans l'exercice f, et
$$V = \int_0^r \left(\int_0^{2\pi} (a+\rho\cos\theta)\rho\, d\theta \right) d\theta = 2\pi r^2 a.$$

c. Considérons l'application
$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (\sqrt{x^2+y^2}, z). \end{array}$$
Par définition le solide $\hat{A}$ égale $\phi^{-1}(A)$. L'application ϕ est continue, donc borélienne. Comme A est supposé borélien, il en est donc de même de $\hat{A}$ lui-même.

Considérons maintenant l'application
$$\begin{array}{rccl} h: &]0,2\pi[\times]0,+\infty[\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3 \setminus (\{0\}\times[0,+\infty[\times\mathbb{R}) \\ & (\theta,y,z) & \mapsto & (y\cos\theta, y\sin\theta, z). \end{array}$$
C'est un difféomorphisme. (Nous notons ici y la variable habituellement notée r, parce que la situation privilégie le demi-plan (y,z), $y>0$, dans lequel on a $y=r$). Comme le demi-plan $\{0\}\times[0,+\infty[\times\mathbb{R}$ est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^3$ et comme le jacobien de h vaut $-y$, la formule du changement de variable montre que l'on a
$$V = \int_{\hat{A}} dx\, dy\, dz = \int_{]0,2\pi[\times]0,+\infty[\times\mathbb{R}} |y|\, d\theta\, dy\, dz.$$
Remarquons que la fonction $(\theta,y,z)\mapsto y$ est positive. Donc d'après le théorème de Fubini et par linéarité de l'intégrale on a
$$V = \int_A \left(\int_0^{2\pi} y\, d\theta \right) dy\, dz = \int_A \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) y\, dy\, dz = 2\pi \int_A y\, dy\, dz.$$

d. En Mécanique, on montre que, lorsque l'ellipsoïde est en rotation autour de l'axe des z, par exemple, le moment d'inertie I_z est le rapport entre le moment cinétique et la vitesse angulaire.

Le moment d'inertie I_z vaut
$$I_z = \int_E r^2\, dx\, dy\, dz,$$
où $r^2 = x^2+y^2 = \rho^2\sin^2\theta(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi)$ est le carré de la distance à l'axe des z. En utilisant le même changement de variables que dans la question précédente, on voit que :
$$I_z = abc \int_{]0,1[\times]0,\pi[\times]0,2\pi[} \rho^4 \sin^3\theta\, (a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi)\, d\rho\, d\theta\, d\varphi,$$
soit
$$I_z = abc \int_0^1 \rho^4\, d\rho \int_0^\pi \sin^3\theta\ d\theta \int_0^{2\pi} (a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi)\, d\varphi.$$
Or on a
$$\int_0^\pi \sin^3\theta\, d\theta = \frac{1}{4}\int_0^\pi (-\sin(3\theta) + 3\sin\theta)\, d\theta = \frac{4}{3}$$
et
$$\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi\, d\varphi = \pi.$$
Donc
$$I_z = \frac{4\pi}{15}(a^2+b^2)abc.$$
Les deux autres moments d'inertie, I_x et I_y, s'obtiennent en permutant le rôle des axes.

e. Soit v_n le volume de $\mathbb{B}^n$. D'abord, notons que la volume de la boule de rayon $r > 0$ est $r^n v_n$. Ceci peut se démontrer en recouvrant la boule $\mathbb{B}^n$ par une infinité dénombrable de pavés ouverts, ou en utilisant la formule du changement de variables. Ensuite, d'après le théorème de Fubini on a

$$\begin{aligned} v_n &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{\{x_1^2+...+x_n^2\leq 1\}}(x_1, ..., x_n)\, dx_1 \otimes ... \otimes dx_n \\ &= \int_{[-1,1]} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \mathbb{1}_{\{x_2^2+...+x_n^2\leq 1-x_1^2\}}\, dx_2 \otimes ... \otimes dx_n \right) dx_1 \\ &= \int_{[-1,1]} (1-x_1)^{(n-1)/2} v_{n-1}\, dx_1 \\ &= I_{n-1} v_{n-1}, \quad I_n = \int_{-1}^{1} (1-x)^{n/2}\, dx. \end{aligned}$$

Une intégration par partie montre que les intégrales de Wallis I_n satisfont

$$I_n = n \int_{[-1,1]} x^2 (1-x^2)^{n/2-1}\, dx = n(I_{n-2} - I_n),$$

donc

$$I_n = \frac{n}{n+1} I_{n-2}.$$

Comme $I_1 = \pi/2$ et $I_2 = 4/3$, on en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a

$$v_{2k} = \frac{\pi^k}{k!} \quad \text{et} \quad v_{2k+1} = \frac{2^{k+1}\pi^k}{1.3...(2k+1)}.$$

En utilisant le fait que la fonction

$$\Gamma : z \mapsto \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt \quad (z \in \mathbb{C}, \Re(z) > 0)$$

d'Euler satisfait

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi} \quad \text{et} \quad \Gamma(1) = 1$$

on trouve

$$v_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}.$$

7. Intégrale curviligne. Soient I et J deux intervalles compacts de $\mathbb{R}$, $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ et $\beta : J \to \mathbb{R}^3$ deux applications injectives de classe C^1 et $\phi : I \to J$, $s \mapsto t = \phi(s)$ un difféomorphisme de classe C^1 tels que $\alpha = \beta \circ \phi$. Les deux chemins α et β sont donc deux paramétrages de la courbe $C = \alpha(I) = \beta(J)$. Notons λ_I et λ_J les restrictions de la mesure de Lebesgue respectivement à I et à J.
a. Montrer que si $f : \alpha(I) \to \mathbb{R}^+$ est une fonction borélienne positive on a

$$\int_I f \circ \alpha \; \|\alpha'\| \; d\lambda_I = \int_J f \circ \beta \; \|\beta'\| \; d\lambda_J.$$

b. En déduire que les mesures $\alpha_*(\|\alpha'\| \bullet \lambda_I)$ (image par α de la mesure de densité $\|\alpha'\|$ par rapport à λ_I) et $\beta_*(\|\beta'\| \bullet \lambda_J)$ coïncident. Notons l_c cette mesure de $\mathbb{R}^3$.

c. Interpréter l'égalité de la question précédente et donner une formule pour la longueur $L(C)$ de la courbe C faisant intervenir l_C.

Soit $\hat{\rho}$ une mesure sur I et soit ρ la mesure image de $\|\alpha'\| \bullet \hat{\rho}$ par α. La mesure ρ peut s'interpréter comme une répartition de masse, de charge électrique, etc. le long de C.

d. Donner une expression de la longueur de la cardioïde dont l'équation en coordonnées polaires est

$$r = 1 + \cos\theta, \quad \theta \in [-\pi, \pi],$$

et calculer la masse de cette cardioïde en supposant que sa répartition de masse est donnée par la mesure

$$\hat{\rho} = \delta_0 + \frac{1}{\sqrt{1+\sin\theta}} \bullet \lambda_{[-\pi,\pi]},$$

où δ_0 est la mesure de Dirac en $\theta = 0$.

Correction.

a. Si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est une fonction borélienne bornée, la fonction $s \mapsto f \circ \alpha \ \|\alpha'(s)\|$ est intégrable par rapport à λ_I et la formule de dérivation des fonctions composées montre qu'on a

$$\int_I f \circ \alpha \ \|\alpha'\| \ d\lambda_I = \int_I f \circ \beta(\phi(s)) \, \|\beta'(\phi(s))\| \ |\phi'(s)| \, d\lambda_I(s).$$

Puisque le bord de I est de mesure nulle, on peut ouvrir provisoirement l'intervalle I et appliquer le théorème du changement de variable en posant $t = \phi(s)$; le facteur $\phi'(s)$ est précisément le jacobien de ce changement de variable. On obtient

$$\int_I f \circ \alpha \ \|\alpha'\| \ d\lambda_I = \int_J f \circ \beta(t) \ \|\beta'(t)\| \ d\lambda_J(t).$$

b. D'après la formule d'intégration par rapport à une mesure à densité on a

$$\int_I f \circ \alpha \ \|\alpha'\| \ d\lambda_I = \int_I f \circ \alpha \, d\left(\|\alpha'\| \bullet \lambda_I\right),$$

et, d'après la formule d'intégration par rapport à une mesure image

$$\int_I f \circ \alpha \ \|\alpha'\| \ d\lambda_I = \int_{\mathbb{R}^3} f \, d\left(\alpha_* \left(\|\alpha'\| \bullet \lambda_I\right)\right).$$

Donc d'après la question précédente, pour tout fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ borélienne et bornée on a

$$\int_{\mathbb{R}^3} f \, d\left(\alpha_* \left(\|\alpha'\| \bullet \lambda_I\right)\right) = \int_{\mathbb{R}^3} f \, d\left(\beta_* \left(\|\beta'\| \bullet \lambda_J\right)\right).$$

En prenant pour f les fonctions indicatrices de boréliens de $\mathbb{R}^3$ (qui sont bornées), on obtient :

$$\alpha_*(\|\alpha'\| \bullet \lambda_I) = \beta_*(\|\beta'\| \bullet \lambda_J) = l_C.$$

c. Les mesures images $\alpha_*\lambda_I$ et $\beta_*\lambda_J$ sont des mesures de durée. Comme le temps mis pour parcourir la courbe C dépend du paramétrage, ces mesures n'ont aucune raison de coïncider.

En revanche, un paramétrage étant donné, le choix de la densité $\|\alpha'\|$ permet de définir une mesure l_C indépendante du paramétrage ; cette densité est la vitesse, et la mesure $\|\alpha'\| \bullet \lambda_I$ est la mesure de distance parcourue, effectivement indépendante de la vitesse de paramétrage.

La longueur de la courbe peut donc être définie par la formule

$$L(C) = \int_{\mathbb{R}^3} dl_C = \int_I \|\alpha'\| \ d\lambda_I \ ;$$

une vérification facile montre que par exemple la longueur d'un segment $[a, b]$ $(a < b)$ à vitesse constante est bien $b - a$.

d. Le paramétrage de la cardioïde par l'angle polaire est donnée par

$$\alpha : \theta \in [-\pi, \pi] \mapsto \begin{pmatrix} (1+\cos\theta)\cos\theta \\ (1+\cos\theta)\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta + (1+\cos 2\theta)/2 \\ \sin\theta + (\sin 2\theta)/2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

La vitesse du paramétrage en θ vaut

$$\|\alpha'(\theta)\| = \sqrt{2}\sqrt{1+\cos\theta} = 2|\cos(\theta/2)|.$$

Donc la longueur de la cardioïde vaut

$$L(C) = 8\int_0^{\pi/2} \cos(\theta/2)\, d\theta = 8\sqrt{2}.$$

La masse totale de la cardioïde est

$$\int_{\mathbb{R}^3} d\alpha_*(\|\alpha'\| \bullet \hat{\rho}) = \int_{[-\pi,\pi]} \|\alpha'\|\ d\hat{\rho} = \int_{[-\pi,\pi]} \|\alpha'\| \left(d\delta_0 + \frac{1}{1+\sin\theta} d\lambda_{[-\pi,\pi]} \right).$$

Le premier terme, qui correspond à une masse ponctuelle, donne $\sqrt{2}$. Le second donne

$$8\int_0^{\pi/2} \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}\, d\theta = 8\left[\ln(1+\sin\theta)\right]_0^{\pi/2} = 8\ln 2.$$

Finalement la masse totale est $\sqrt{2} + 8\ln 2$.

8. Intégrale de surface. Soient K et L deux compacts de $\mathbb{R}^2$, $\alpha : K \to \mathbb{R}^3$ et $\beta : L \to \mathbb{R}^3$ deux surfaces paramétrées injectives de classe C^1 et $\phi : K \to L$, $(s,t) \mapsto (u,v) = \phi(s,t)$ un difféomorphisme de classe C^1 tels que $\alpha = \beta \circ \phi$. Les deux applications α et β sont deux paramétrages de la surface $S = \alpha(K) = \beta(L)$.

a. Montrer que si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^+$ une fonction borélienne positive on a

$$\int_K f \circ \alpha \left\| \frac{\partial \alpha}{\partial s} \wedge \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right\| ds \otimes dt = \int_L f \circ \beta \left\| \frac{\partial \beta}{\partial u} \wedge \frac{\partial \beta}{\partial v} \right\| du \otimes dv.$$

b. En déduire une mesure σ_S sur $\mathbb{R}^3$ qui dépend de S mais pas son paramétrage. En déduire une formule pour l'aire $A(S)$ de la surface S, que l'on justifiera rapidement.

c. Calculer l'aire de la sphère $\mathbb{S}^2 : x^2 + y^2 + z^2 = 1$ et du tore $\mathbb{T}^2$: $(\sqrt{x^2+y^2} - a)^2 + z^2 = r^2$ $(0 \le r \le a)$.

d. Montrer que pour la sphère la mesure $\sigma_{\mathbb{S}^2}$ est invariante par rotation.

Considérons maintenant un compact K de $\mathbb{R}^2$ et une fonction positive $f : K \to \mathbb{R}^+$ de classe C^1. Notons

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ z = f(x,y)\}$$

le graphe de f.

e. Trouver un paramétrage $\alpha : K \to \mathbb{R}^3$ de S et en déduire une expression de l'aire de S comme une intégrale sur K.

f. Calculer cette aire dans le cas où $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2 \le 1\}$ et où $f(x,y) = \dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$.

g. En revenant au cas général du début de l'exercice, montrer que

$$\left\|\frac{\partial\alpha}{\partial s}\wedge\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right\|^2=\left\|\frac{\partial\alpha}{\partial s}\right\|^2\left\|\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right\|^2-\left(\frac{\partial\alpha}{\partial s}\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)^2$$

et en déduire une formule qui donne l'aire d'une surface dans $\mathbb{R}^n$ en fonction de son paramétrage $\alpha : K\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^n$.

Correction.

a. D'abord, comme α et β sont de classe C^1 et comme f est positive, les deux intégrales à comparer existent (mais sont éventuellement infinies). Par ailleurs, comme $\alpha=\beta\circ\phi$, si on note $(s,t)=\phi(u,v)$ on a

$$\frac{\partial\alpha}{\partial u}=\frac{\partial\beta}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial u}+\frac{\partial\beta}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial u}\quad\text{et}\quad\frac{\partial\alpha}{\partial v}=\frac{\partial\beta}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial v}+\frac{\partial\beta}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial v}$$

donc

$$\frac{\partial\alpha}{\partial u}\wedge\frac{\partial\alpha}{\partial v}=\left(\frac{\partial s}{\partial u}\frac{\partial t}{\partial v}-\frac{\partial t}{\partial u}\frac{\partial s}{\partial v}\right)\frac{\partial\beta}{\partial u}\circ\phi\wedge\frac{\partial\beta}{\partial v}\circ\phi=\frac{D(s,t)}{D(u,v)}\,\frac{\partial\beta}{\partial u}\circ\phi\wedge\frac{\partial\beta}{\partial v}\circ\phi.$$

Donc la formule du changement de variable montre que

$$\int_K f\circ\alpha\,\left\|\frac{\partial\alpha}{\partial u}\wedge\frac{\partial\alpha}{\partial v}\right\|\,du\otimes dv=\int_L f\circ\beta\,\left\|\frac{\partial\beta}{\partial u}\wedge\frac{\partial\beta}{\partial v}\right\|\,ds\otimes dt.$$

b. L'égalité de la question précédente appliquée aux fonctions indicatrices des boréliens de $\mathbb{R}^3$ montre que les mesures images

$$\alpha_*\left(\left\|\frac{\partial\alpha}{\partial u}\wedge\frac{\partial\alpha}{\partial v}\right\|\bullet du\otimes dv\right)\quad\text{et}\quad\beta_*\left(\left\|\frac{\partial\beta}{\partial s}\wedge\frac{\partial\beta}{\partial t}\right\|\bullet ds\otimes dt\right)$$

sont égales. Notons cette mesure σ_S. On peut alors définir l'aire de S par la formule

$$A(S)=\int_{\mathbb{R}^3}d\sigma_S=\int_K\left\|\frac{\partial\alpha}{\partial u}\wedge\frac{\partial\alpha}{\partial v}\right\|\,du\otimes dv.$$

La densité $\left\|\frac{\partial\alpha}{\partial u}\wedge\frac{\partial\alpha}{\partial v}\right\|$ est l'aire du parallélogramme dont deux côtés adjacents sont formés par les vecteurs vitesses $\partial\alpha/\partial u$ et $\partial\alpha/\partial v$; elle caractérise donc la vitesse aréolaire locale du paramétrage de la surface.

c. Considérons le paramétrage de la sphère de rayon 1 par ses angles sphériques :

$$\alpha:(\theta,\phi)\in[0,2\pi]\times[0,\pi]\mapsto\begin{pmatrix}\sin\phi\cos\theta\\ \sin\phi\sin\theta\\ \cos\phi.\end{pmatrix}.$$

Alors on a

$$\left\|\frac{\partial\alpha}{\partial u}\wedge\frac{\partial\alpha}{\partial v}\right\|=\left\|\begin{pmatrix}\sin^2\phi\cos\theta\\ \sin^2\phi\sin\theta\\ \cos\phi\sin\phi\end{pmatrix}\right\|=|\sin\phi|.$$

On obtient $A(S^2)=\int_{[0,2\pi]\times[0,\pi]}\sin\phi\;d\theta\,d\phi=4\pi$.

Considérons maintenant le paramétrage du tore défini par :

$$\alpha:(\theta,\phi)\in[0,2\pi]^2\mapsto\begin{pmatrix}(a+r\cos\theta)\cos\phi\\ (a+r\cos\theta)\sin\phi\\ r\sin\theta\end{pmatrix}.$$

Alors on a

$$\left\|\frac{\partial\alpha}{\partial u}\wedge\frac{\partial\alpha}{\partial v}\right\|=\left\|-r(a+r\cos\theta)\begin{pmatrix}\cos\theta\cos\phi\\ \cos\theta\sin\phi\\ \sin\theta\end{pmatrix}\right\|=|r(a+r\cos\theta)|.$$

On obtient $A(T^2)=\int_{[0,2\pi]^2}r(a+r\cos\theta)\;d\theta\,d\phi=4\pi^2ar$.

d. La mesure σ_{S^2} est invariante par changement de paramétrage. Donc si on définit des angles sphériques associés à un repère obtenu par rotation du repère initial, on obtiendra la même mesure σ_{S^2}. Cette dernière est donc invariante par rotation.
e. S est naturellement paramétrée par l'application

$$\alpha : (x, y) \in K \mapsto (x, y, f(x, y)).$$

Alors

$$\left\| \frac{\partial \alpha}{\partial x} \wedge \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right\| = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}$$

et donc

$$A(S) = \int_K \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dx \otimes dy,$$

où f_x et f_y dénotent les dérivées partielles de f par rapport à x et à y.
f. La formule précédente appliquée au cas où $f(x, y) = (x^2 + y^2)/2$ donne

$$A(S) = \int_K \sqrt{1 + x^2 + y^2}\, dx \otimes dy.$$

Cette intégrale se calcule facilement en passant en coordonnées polaires :

$$A(S) = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \sqrt{1 + r^2}\, r\, dr \right) d\theta = \frac{2\pi}{3}(2^{3/2} - 1).$$

g. L'égalité donnée résulte d'un calcul élémentaire. L'avantage du membre de droite est qu'il garde un sens en dimension quelconque, puisqu'il ne fait pas intervenir de produit scalaire. Donc si $\alpha : K \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$ est le paramétrage d'une surface S dans $\mathbb{R}^n$, l'aire de S peut être définie par la formule

$$A(S) = \int_K \sqrt{\left\| \frac{\partial \alpha}{\partial u} \right\|^2 \left\| \frac{\partial \alpha}{\partial v} \right\|^2 - \left(\frac{\partial \alpha}{\partial u} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial v} \right)^2}\, du \otimes dv.$$

10. Action lagrangienne et géodésiques. Soient I un intervalle compact de $\mathbb{R}$, $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ une application injective de classe C^1 et $L : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction donnée de classe C^2. L'*action* de α relative au *lagrangien* L est le nombre

$$A_L(\alpha) = \int_{[0,1]} L(\alpha(t), \alpha'(t))\, d\lambda_{[0,1]}(t).$$

(Par exemple, la longueur de la courbe $\alpha(I)$ est donnée par l'action de α relativement au lagrangien $L : (x, y) \mapsto \|y\|$.)
a. Montrer que $A_L(\alpha)$ existe.

Soit de plus $a : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ une courbe de classe C^2 telle que $a(0) = a(1) = 0$. Soit γ_ϵ une *variation* de α, définie par $\gamma_\epsilon(t) = \alpha(t) + \epsilon a(t)$ pour tout $\epsilon \in [-1, 1]$ et tout $t \in [0, 1]$.
b. Montrer que l'intégrale

$$\int_{[0,1]} L(\alpha(t) + \epsilon a(t), \alpha'(t) + \epsilon a'(t))\, d\lambda_{[0,1]}(t)$$

est dérivable par rapport à ϵ en 0. On note $dA_L(\alpha) \cdot a$ cette dérivée.

c. Montrer en effectuant une intégration par parties qu'on a

$$dA(\alpha)\cdot a = \int_{[0,1]} \sum_{1\leq j\leq 3} \left(\frac{\partial L}{\partial x_j}(\alpha(t), \alpha'(t)) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial y_j}(\alpha(t), \alpha'(t)) \right) a_j(t)\, d\lambda_{[0,1]}(t).$$

d. En déduire que si $dA_L(\alpha)\cdot a = 0$ pour tout chemin a choisi comme plus haut les *équations d'Euler-Lagrange*

$$\frac{\partial L}{\partial x_j}(\alpha(t), \alpha'(t)) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial y_j}(\alpha(t), \alpha'(t)) = 0 \quad (j = 1, 2, 3)$$

sont satisfaites.
e. Montrer que si la fonction $\alpha \mapsto A_L(\alpha)$ a un extremum local en un chemin α, ce chemin satisfait les équations d'Euler-Lagrange. Récriproquement, les chemins satisfaisant les équations d'Euler-Lagrange sont-ils automatiquement des extrema locaux ?
f. Écrire les équations d'Euler-Lagrange dans le cas particulier où L est de la forme

$$L(x, y) = \frac{1}{2}\|y\|^2 + V(x),$$

où $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1. Interpréter.
g. Quels sont les solutions quand $V = 0$?

Nous allons généraliser ceci au cas où un point matériel se meut sur une surface courbe, soumis à sa seule inertie, sur la piste de la Théorie de la Relativité générale !

Soit S une surface de révolution engendrée par la rotation autour de l'axe des z de la courbe du plan des xz d'équation

$$x = f(z), \quad 0 \leq z \leq 1,$$

où f est une fonction strictement positive de classe C^1.
h. Trouver un paramétrage $F : K = [0, 2\pi] \times [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ de S.

Soit $L : K \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ le lagrangien défini par

$$L(\theta, z, \Theta, Z) = \frac{1}{2}\|dF(\theta, z)\cdot(\Theta, Z)\|^2,$$

où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne de $\mathbb{R}^3$.
i. Expliciter L et les équations d'Euler-Lagrange pour un chemin $\alpha : t \in I \to (\theta, z) \in K$ tracé sur S.
j. Soit $C : K\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $C(\theta, z, \Theta, Z) = f(z)^2\Theta$. Montrer que si α satisfait les équations d'Euler-Lagrange, la fonction $C(\alpha, \alpha') : I \to \mathbb{R}$ est constante.

k. Soit $H : K \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$H(\theta, z, \Theta, Z) = \frac{1}{2}(f'(z)^2 + 1)Z^2 + \frac{C(\theta, z, \Theta, Z)^2}{2f^2}.$$

Montrer que si α satisfait les équations d'Euler Lagrange, la fonction $H(\alpha, \alpha') : I \to \mathbb{R}$ est constante.
l. Décrire les *géodésiques* de S (qui généralisent les droites d'un espace euclidien), c'est-à-dire les solutions α des équations d'Euler-Lagrange.

Correction.
a. D'après les hypothèses, la fonction composée $L(\alpha, \alpha') : [0,1] \to \mathbb{R}$ est continue sur I, donc borélienne et bornée, donc intégrable.
b. Pour tout $\epsilon \in [-1,1]$, la fonction $L(\gamma_\epsilon, \gamma'_\epsilon)$ est continue sur I, donc intégrable. De plus, pour tout $t \in I$ la fonction

$$\epsilon \mapsto L(\gamma_\epsilon(t), \gamma'_\epsilon(t))$$

est de classe C^1. Enfin, les fonctions

$$(\epsilon, t) \in [-1,1] \times I \mapsto L(\gamma_\epsilon(t), \gamma'_\epsilon(t)) \quad \text{et} \quad (\epsilon, t) \in [-1,1] \times I \mapsto \frac{\partial}{\partial \epsilon} L(\gamma_\epsilon(t), \gamma'_\epsilon(t))$$

sont continues, donc bornées en valeur absolue par une constante M, qui est $d\lambda(t)$-intégrable sur I. Donc la fonction $\epsilon \mapsto A_L(\gamma_\epsilon)$ est dérivable, et en particulier sa dérivée en $\epsilon = 0$ vaut

$$dA_L(\alpha) \cdot a = \int_I \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left(L(\gamma_\epsilon(t), \gamma'_\epsilon(t))\right)\Big|_{\epsilon=0} d\lambda(t),$$

soit

$$dA_L(\alpha) \cdot a = \int_I \left(\frac{\partial L}{\partial x}(\alpha(t), \alpha'(t))\alpha(t) + \frac{\partial L}{\partial y}(\alpha(t), \alpha'(t))\alpha'(t) \right) d\lambda(t).$$

c. L'intégration par parties du second terme dans l'expression précédente montre qu'on a

$$dA_L(\alpha) \cdot a = \int_I \frac{\partial L}{\partial x}(\alpha, \alpha')\alpha \, d\lambda + \left[\frac{\partial L}{\partial y}(\alpha(t), \alpha'(t))\alpha(t) \right]_{\partial I} - \int_I \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial y}(\alpha(t), \alpha'(t))\right)\alpha(t) \, d\lambda(t).$$

Or le terme entre crochets est nul parce que a s'annule sur le bord ∂I de I. Donc on a la formule voulue.
d. Supposons que les équations d'Euler-Lagrange ne sont pas satisfaites sur I. Il existe $t_0 \in I$ et $j \in \{1,2,3\}$ tels que

$$\frac{\partial L}{\partial x_j}(\alpha(t_0), \alpha'(t_0)) - \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} \frac{\partial L}{\partial y_j}(\alpha(t), \alpha'(t)) \neq 0.$$

Par continuité il existe un intervalle $[u, u+\delta]$, $\delta > 0$, inclus dans l'intérieur de I et tel que le membre de gauche de l'équation est strictement positif ou strictement négatif sur $[u, u+\delta]$; supposons par exemple être dans le cas positif. Choisissons une variation infinitésimale a telle que $a = 0$ en dehors de $[u, +\delta]$, $0 \le a \le 1$ sur I et $a = 1$ sur $[u + \delta/3, u + 2\delta/3]$. (Il est facile de construire une telle fonction de classe C^∞ une fois remarqué que par exemple la fonction $x \mapsto e^{-1/x^2}$ a toutes ses dérivées nulles en 0.) Alors d'après l'expression de la question précédente on a $dA_L(\alpha) \cdot a > 0$. Par contraposition on a montré que si $dA_L(\alpha) \cdot a = 0$ pour toute variation infinitésimale a les équations d'Euler-Lagrange sont satisfaites.

e. Si la fonction $\alpha \mapsto A_L(\alpha)$ a un extremum local en un chemin α, pour toute variation infinitésimale a la fonction d'une variable

$$\epsilon \mapsto A_L(\gamma_\epsilon), \quad \gamma_\epsilon = \alpha + \epsilon a$$

possède un extremum local et a donc une dérivée nulle. D'après la question précédente ceci montre que les équations d'Euler-Lagrange sont satisfaites.

Récriproquement, il se peut qu'un chemin α satisfasse les équations d'Euler-Lagrange sans que la fonction A_L ait un extrememum local en α. (Deux analogues en dimension finie sont $x \mapsto x^3$ en 0 et $(x, y) \mapsto x^2 - y^2$.)

f. Dans le cas particulier où L est de la forme

$$L(x, y) = \frac{1}{2} \|y\|^2 + V(x),$$

où $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1, les équations d'Euler-Lagrange s'écrivent

$$\frac{d\alpha'}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x}(\alpha).$$

Ces équations sont les équations de Newton, en Mécanique classique, d'un point matériel soumis à un champ de force dérivant du potentiel V. Ceci signifie que les trajectoires de ce système matériel sont les points critiques de l'action : le point matériel choisit, en un sens, parmi toutes les trajectoires possibles, celle qui est un point critique de A_L.

Plus généralement les équations de la Mécanique classique, celles de la Relativité générale, ou celles des théorie de jauge s'énoncent de façon particulièrement simple dans ce formalisme lagrangien.

g. Quand $V = 0$, les solutions sont les chemins α de vecteur vitesse constant, c'est-à-dire les mouvements rectilignes uniformes.

h. Un paramétrage de S est l'application

$$F : K = [0, 2\pi] \times [0, 1] \to \mathbb{R}^3, \quad (\theta, z) \mapsto \begin{pmatrix} x = & f(z)\cos\theta \\ y = & f(z)\sin\theta \\ z & \end{pmatrix}.$$

i. On a

$$L(\theta, z, \Theta, Z) = \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} -f(z)\sin\theta & f'(z)\cos\theta \\ f(z)\cos\theta & f'(z)\sin\theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Theta \\ Z \end{pmatrix} \right\|^2 = \frac{1}{2} f(z)^2\Theta^2 + \frac{1}{2}(1 + f'(z)^2)Z^2.$$

Donc les équations d'Euler-Lagrange s'écrivent, pour un chemin $F \circ \alpha : t \in I \mapsto F \circ \alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$, avec $\alpha(t) = (\theta(t), z(t))$,

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(f(z)^2 z'(t)) = 0 \\ f(z(t))f'(z(t))\theta'(t)^2 - f'(z(t))f''(z(t))z'(t)^2 - (1 + f'(z(t))^2)z''(t) = 0 \end{cases}$$

j. La première des deux équations d'Euler-Lagrange montre que la fonction C est constante le long des solutions.

k. En dérivant H le long d'une trajectoire et en utilisant la question précédente et la seconde équation d'Euler-Lagrange on voit que $H \circ \alpha$ est une fonction constante si α est une solution des équations d'Euler-Lagrange.

l. D'après les deux questions précédentes, si $t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$ est une géodésique de la surface de révolution, il existe deux réels C et H tels que

$$\theta' = \frac{C}{f(z)^2} \quad \text{et} \quad z'^2 = \frac{2}{1 + f'(z)^2} \left(H - \frac{C}{2f(z)^2} \right).$$

On a $H > 0$ (ou sinon $H = 0$ et le chemin est constant). On peut supposer par exemple que $C = f(z)^2\theta'$ est strictement positif, c'est-à-dire que le mouvement se fait dans un sens positif autour de l'axe de symétrie de la surface.

L'équation donnant θ' montre que la vitesse angulaire est inversement proportionnelle au carré de la distance à l'axe de révolution.

L'équation donnant z' montre que z varie dans un intervalle sur lequel

$$f(z)^2 \geq \frac{C}{2H}.$$

Si cette inégalité définit par exemple un intervalle $[z_0, z_1] \subset [0,1]$, le point mobile va osciller une infinité de fois entre les hauteurs $z = z_0$ et $z = z_1$.

11. Calcul d'une intégrale multiple.

a. Montrer que la tribu $\mathscr{B}(\mathbb{R}^+) \otimes \mathscr{P}(\mathbb{N})$ est l'ensemble des parties de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{N}$ de la forme $\cup_{n\in\mathbb{N}}(A_n \times \{n\})$ avec $A_n \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^+)$.
b. Montrer que, si m est une mesure bornée sur $\mathscr{B}(\mathbb{R}^+)$, il existe une unique mesure bornée μ sur $\mathscr{B}(\mathbb{R}^+) \times \mathscr{P}(\mathbb{N})$ telle que pour toute partie $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^+)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait

$$\mu(A \times \{n\}) = \int_A e^{-t} \frac{t^n}{n!}\, dm(t).$$

c. Calculer

$$\int e^{int}\, d\mu(t,n)$$

en fonction de l'intégrale d'une fonction sur $\mathbb{R}^+$.
d. La mesure μ est-elle toujours une mesure produit ?

Correction.
a. Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des parties de la forme $\cup_{n\in\mathbb{N}}(A_n \times \{n\})$ avec $A_n \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^+)$. Soit $A \times N$ un pavé mesurable de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{N}$ ($A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^+)$ et $N \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$). Notons $A_n = (A \times N) \cap (\mathscr{B}(\mathbb{R}^+) \times \{n\})$. Alors on a $A \times N = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \times \{n\}$ donc $A \times N \in \mathscr{E}$. Par ailleurs, $\mathscr{E}$ vérifie les axiomes de définition d'une tribu. Donc $\mathscr{E}$ contient $\mathscr{B}(\mathbb{R}^+) \otimes \mathscr{P}(\mathbb{N})$, qui est la plus petit tribu engendrée par les pavés mesurables de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{N}$.

Réciproquement, $\mathscr{B}(\mathbb{R}^+) \otimes \mathscr{P}(\mathbb{N})$ elle contient les pavés de la forme $A \times \{n\}$ avec $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^+)$ et $n \in \mathbb{N}$. Comme elle est stable par union dénombrable, elle contient les parties de la forme $\cup_{n\in\mathbb{N}}(A_n \times \{n\})$ avec $A_n \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^+)$. Finalement, $\mathscr{E} = \mathscr{B}(\mathbb{R}^+) \otimes \mathscr{P}(\mathbb{N})$.
b. Considérons une partie $C \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^+) \otimes \mathscr{P}(\mathbb{N})$. D'après la question précédente elle est une union dénombrable disjointe $C = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \times \{n\}$, $A_n \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^+)$. Si la mesure μ existe, elle est σ-additive donc

$$\mu(C) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n \times \{n\}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{A_n} e^{-t} \frac{t^n}{n!}\, dm(t),$$

ce qui montre l'unicité de μ.

Cette dernière formule définit une mesure comme voulue. En effet, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale existe parce que l'intégrande $t \mapsto e^{-t} t^n / n!$ est continu donc borélien, et positif. La somme existe parce qu'il s'agit d'une série à termes positifs. Une vérification élémentaire montre que $\mu(\emptyset) = 0$ et que μ ainsi définie est σ-additive (il faut utiliser le corollaire du théorème de convergence monotone, qui permet d'intervertir intégration et sommation d'une série à termes positifs). La mesure obtenue est bornée parce que

$$\mu(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{N}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^+} e^{-t} \frac{t^n}{n!}\, dm(t) = \int_{\mathbb{R}^+} e^{-t} \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{t^n}{n!}\, dm(t) = m(\mathbb{R}^+) < \infty.$$

c. L'intégrale
$$I = \int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{N}} e^{int} \, d\mu(t,n)$$
à calculer vaut
$$I = \int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{N}} \sum_{p \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{\{p\}}(n) e^{int} \, d\mu(t,n).$$
D'après le théorème de convergence dominée (puisque $|e^{int}| \leq 1$ et puisque la fonction constante 1 est intégrable, μ étant bornée),
$$I = \sum_{p \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^+ \times \{p\}} e^{int} \, d\mu(n,t).$$
En restriction à chaque tranche $\mathbb{R}^+ \times \{n\}$ ($n \in \mathbb{N}$) la mesure μ a pour densité $e^{-t} t^n / n!$ par rapport à la mesure m. Donc
$$I = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^+} e^{int} e^{-t} \frac{t^n}{n!} \, dm(t).$$
Le théorème de convergence dominée permet d'écrire
$$I = \int_{\mathbb{R}^+} e^{-t} \sum_{n \in \mathbb{N}} e^{int} \frac{t^n}{n!} \, dm(t) = \int_{\mathbb{R}^+} e^{t(e^{it}-1)} \, dm(t).$$
d. Si par exemple m est la mesure de Dirac δ_0 en 0, pour tout pavé mesurable $A \times N \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^+) \times \mathscr{P}(\mathbb{N})$ on a
$$\mu(A \times N) = \delta_0(A) \delta_0(N),$$
donc μ est le produit tensoriel de la mesure δ_0 sur $\mathbb{R}^+$ et de δ_0 sur $\mathbb{N}$.

En revanche, supposons par exemple que $m = \delta_0 + \delta_2$. Le quotient
$$\frac{\mu(\{0\} \times \{n\})}{\mu(\{0,2\} \times \{n\})}$$
dépend non trivialement de n (regarder pour $n = 0$ et pour $n = 1$) ; donc μ n'est pas une mesure produit.

12. Propriétés élémentaires des fonctions Γ et B et application à une formule sommatoire. On pose, pour tous $a, b \in \mathbb{R}_*^+$,
$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} \, dx \quad \text{et} \quad B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} \, dx.$$
a. Montrer succintement que la fonction $\Gamma : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R}_*^+$ est bien définie.

b. Montrer que
$$B(a,b) = B(b,a) = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2a-1} \theta \, \cos^{2b-1} \theta \, d\theta,$$
c. Calculer $B(1/2, 1/2)$ et $B(a, 1)$.

d. Montrer que
$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \ ;$$
on pourra commencer par exprimer $\Gamma(a)\Gamma(b)$ comme une intégrale double sur $(\mathbb{R}^+)^2$, faire le changement de variable $(x,y) \mapsto (x, y+x)$, puis appliquer le théorème de Fubini.

e. En déduire que $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$. En déduire l'expression de $\Gamma(n)$ lorsque $n \in \mathbb{N}_*$.
f. En déduire que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ et que $\int_0^{+\infty} e^{-y^2}\,dy = \sqrt{\pi}/2$.

Soit maintenant $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction mesurable. On veut montrer qu'il existe un réel $\omega_n > 0$ indépendant de f tel que

$$\int_{(\mathbb{R}_*^+)^n} f(x_1^{b_1}+\ldots+x_n^{b_n})\, x_1^{a_1-1}\ldots x_n^{a_n-1}\,dx = \omega_n \int_0^{+\infty} f(t)\, t^{a_1/b_1+\ldots+a_n/b_n-1}\,dt. \qquad (*)$$

g. Montrer qu'il existe un réel $\nu_n > 0$ indépendant de f tel que

$$\int_{(\mathbb{R}_*^+)^n} f(x_1+\ldots+x_n)\, x_1^{a_1-1}\ldots x_n^{a_n-1}\,dx = \nu_n \int_0^{+\infty} f(t)\, t^{a_1+\ldots+a_n-1}\,dt.$$

h. Exprimer ν_n en fonction de la fonction Γ, en examinant le cas particulier $f(t) = e^{-t}$.
i. En déduire la formule $(*)$ et l'expression de ω_n.
j. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\|x\|)\,dx = \mu_n \int_0^{\infty} f(r) r^{n-1}\,dr,$$

où $\mu_n = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$.
k. Appliquer cette formule au calcul du volume $V_n(\alpha)$ de la boule $\mathbb{B}^n(0,\alpha)$ centrée en 0 de rayon α dans $\mathbb{R}^n$.
l. À quelle condition sur $\alpha \in \mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto 1/\|x\|^\alpha$ est-elle intégrable sur la boule $\mathbb{B}^n(0,1)$? Sur $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{B}^n(0,1)$?

Correction.
a. Considérons la fonction $f_a : [0,+\infty[\to \bar{\mathbb{R}}^+ = [0,+\infty]$ telle que $f_a(x) = x^{a-1}e^{-x}$ si $x > 0$, $f_a(0) = 0$ si $a > 1$, $f_1(0) = 1$ et $f_a(0) = +\infty$ si $a < 1$. Elle est continue, donc borélienne. La fonction réelle $x^{a-1}e^{-x/2}$ est continue sur $[1,+\infty[$ et tend vers 0 en $+\infty$, donc est bornée sur $[1,+\infty[$; comme de plus la fonction $e^{-x/2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, il en est de même de $f_a(x) = x^{a-1}e^{-x/2}\,e^{-x/2}$. Sur l'intervalle $[0,1]$, la fonction e^{-x} est continue donc bornée, et la fonction x^{a-1} est intégrable ; donc f_a elle-même est intégrable. Comme $f_a \geq 0$ pour tout $a > 0$, Γ est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_*^+$.
b. La première égalité découle du changement de variable $x \mapsto 1-x$, et la seconde, du changement de variables $\theta \mapsto \sin^2\theta$.
c. La seconde égalité de la question précédente montre que

$$B(1/2,1/2) = 2\int_0^{\pi/2} \sin^0\theta\cos^0\theta\,d\theta = \pi$$

et que

$$B(a,1) = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2a-1}\theta\cos\theta\,d\theta = \frac{1}{a}\left[\sin^{2a}\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{a}.$$

d. On a

$$\begin{aligned}
\Gamma(a)\Gamma(b) &= \int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}\,dx \int_0^\infty y^{b-1}e^{-y}\,dy \\
&= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty x^{a-1}y^{b-1}e^{-x-y}\,dy\right)dx \quad \text{(linéarité de l'intégrale)} \\
&= \int_0^\infty \left(\int_x^\infty x^{a-1}(\eta-x)^{b-1}e^{-\eta}\,d\eta\right)dx \quad \text{(changement de variables } y=\eta-x\text{)} \\
&= \int_0^\infty \left(\int_0^\eta x^{a-1}(\eta-x)^{b-1}\,dx\right)e^{-\eta}\,d\eta \quad \text{(théorème de Fubini)} \\
&= \int_0^\infty \eta^{a+b-1}e^{-\eta}\,d\eta \int_0^1 \xi^{a-1}(1-\xi)^{b-1}\,d\xi \quad \text{(changement de variables } x=\eta\xi\text{)} \\
&= \Gamma(a+b)\,B(a,b).
\end{aligned}$$

e. On a $\Gamma(1)=1$, donc d'après ce qui précède

$$\Gamma(a+1)=\frac{\Gamma(a)\Gamma(1)}{B(a,1)}=a\Gamma(a).$$

Par récurrence, on a donc $\Gamma(n)=(n-1)!$ pour tout $n\in\mathbb{N}_*$.

f. On a

$$B(1/2,1/2)=\pi=\frac{\Gamma(1/2)^2}{\Gamma(1)},$$

donc $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$. De plus, le changement de variables $x=y^2$ montre que

$$\Gamma(a)=2\int_0^\infty y^{2a-1}e^{-y^2}\,dy\ ;$$

donc, en particulier on a

$$\int_0^\infty e^{-y^2}\,dy=\Gamma(1/2)/2=\sqrt{\pi}/2.$$

g. Le théorème de Fubini permet d'intégrer par rapport à x_n séparément et en premier ; le changement de variable $t=x_1+...+x_n$ donne alors :

$$\int_{(\mathbb{R}_*^+)^n} f(x_1+...+x_n)\,x_1^{a_1-1}...x_n^{a_n-1}\,dx_1\otimes...\otimes dx_n =$$

$$\int_{(\mathbb{R}_*^+)^{n-1}}\left(\int_{t\ge x_1+...+x_{n-1}} f(t)(t-x_1-...-x_{n-1})^{a_n-1}\,dt\right) x_1^{a_1-1}...x_{n-1}^{a_{n-1}-1}\,dx_1\otimes...\otimes dx_{n-1}.$$

Le changement de variables $x_i=t\xi_i$, $i=1,...,n-1$, donne

$$\int_{(\mathbb{R}_*^+)^n} f(x_1+...+x_n)\,x_1^{a_1-1}...x_n^{a_n-1}\,dx_1\otimes...\otimes dx_n=\nu_n\int_0^{+\infty} f(t)\,t^{a_1+...+a_n-1}\,dt,$$

avec

$$\nu_n=\int_{\xi_1+...+\xi_{n-1}<1}\xi_1^{a_1-1}...\xi_{n-1}^{a_{n-1}-1}\,(1-\xi_1-...-\xi_{n-1})^{a_n-1}\,d\xi_1\otimes...\otimes d\xi_{n-1}.$$

h. Le théorème de Fubini appliqué au cas particulier $f(t)=e^{-t}$ montre

$$\int e^{-(x_1+...+x_n)}x_1^{a_1-1}...x_n^{a_n-1}\,dx_1\otimes...\otimes dx_n=\Gamma(a_1)...\Gamma(a_n).$$

Or d'après la question précédente, cette quantité vaut aussi

$$\nu_n\int_0^\infty e^{-t}t^{a_1+...+a_n-1}=\nu_n\Gamma(a_1+...+a_n).$$

Donc

$$\nu_n=\frac{\Gamma(a_1)...\Gamma(a_n)}{\Gamma(a_1+...+a_n)}.$$

i. La formule finale découle maintenant du changement de variables $x_i\mapsto x_i^{b_i}$. On trouve

$$\omega_n=\frac{\Gamma(a_1/b_1)...\Gamma(a_n/b_n)}{b_1...b_n\Gamma(a_1/b_1+...+a_n/b_n)}.$$

j. Il suffit de choisir $a_i = 1$, $b_i = 2$ $(i = 1, ..., n)$ et $\tilde{f}(t) = f(\sqrt{t})$:

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} f(\|x\|)\,dx = \frac{\pi^{n/2}}{2^n\Gamma(n/2)} \int_0^\infty f(r) r^{n-2} 2r\,dr = \frac{\omega_n}{2^n} \int_0^\infty f(r) r^{n-1}\,dr,$$

puis de remarquer que l'intégrale sur $\mathbb{R}^n$ est 2^n fois l'intégrale sur $\mathbb{R}_+^n$.

k. La formule précédente appliquée à la fonction indicatrice de la boule $\mathbb{B}^n(0, \alpha)$ montre

$$V_n(\alpha) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}\alpha^n.$$

l. La même formule montre que l'on a

$$\int_{\mathbb{B}^n(0,1)} \frac{dx}{\|x\|^\alpha} < \infty \Leftrightarrow a < n$$

et

$$\int_{\mathbb{B}^n(0,1)^c} \frac{dx}{\|x\|^\alpha} < \infty \Leftrightarrow a > n.$$

13. Variables aléatoires indépendantes *. Soit $(E, \mathscr{E}, \mu)$ un espace probabilisé.[1] Si A n'est pas négligeable, la *probabilité sachant la partie* A est la probabilité, notée μ_A, définie par

$$\mu_A(B) = \frac{\mu(A \cap B)}{\mu(A)} \quad (\forall B \in \mathscr{E}).$$

a. Déterminer μ_E et $\mu_{\{x\}}$, avec $x \in E$, $\mu(\{x\}) \neq 0$.

Deux parties A et B sont *indépendantes* si $\mu(A \cap B) = \mu(A)\mu(B)$.

b. Expliquer en une phrase pourquoi cette définition correspond à l'intuition, par exemple en examinant le cas où $\mu(A) \neq 0$.

c. Montrer qu'une partie A donnée est indépendante de toute partie B si et seulement si $\mu(A) = 0$ ou 1.

Deux sous-tribus $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont *indépendantes* si tout couple $(A, B) \in \mathscr{F} \times \mathscr{G}$ de parties est indépendant.

d. Donner un exemple de partitions $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ du carré $[0, 1]^2$ qui engendrent des tribus indépendantes par rapport à la mesure de Lebesgue.

Deux fonctions mesurables, f et g, sur $(E, \mathscr{E})$, sont *indépendantes* si les tribus $\sigma(f) = f^{-1}(\mathscr{B}(\mathbb{R}))$ et $\sigma(g) = g^{-1}(\mathscr{B}(\mathbb{R}))$ qu'elles engendrent sont indépendantes.

Par ailleurs, notons $\alpha = f_*\mu$ et $\beta = g_*\mu$ les mesures images de μ par f et g.

---

[1] La Théorie moderne des Probabilités, telle qu'elle a été axiomatisée par le mathématicien russe Kolmogorov à la moitié du XXe siècle, est une branche de la Théorie de la Mesure. Mais pour des raisons historiques et parce que ces deux théories se développent dans des directions propres, les concepts communs possèdent une double terminologie. Voilà un lexique probabiliste de base : l'*univers* est l'espace probabilisé E ; un *possible* est un élément x de E ; un *événement* est une partie mesurable $A \in \mathscr{E}$ de E ; la probabilité sachant A se note $\mu(\cdot|A)$; une *variable aléatoire* est une fonction mesurable $f : (E, \mathscr{E}) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$; la *loi* de f est la mesure image $f_*\mu$ de μ par f ; l'*espérance* de f est son intégrale et se note $\mathbb{E}[f] = \int f\,d\mu$; l'espérance conditionnelle de f par rapport à une sous-tribu $\mathscr{F}$ (cf. le dernier exercice du Chap. V) se note souvent $\mathbb{E}[f|\mathscr{F}]$; enfin, la *fonction caractéristique* de μ est sa transformée de Fourier.

e. Montrer que f et g sont indépendantes si et seulement si la mesure image de μ par $(f,g) : E \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto (f(x), g(x))$ est le produit tensoriel $\alpha \otimes \beta$.
f. En déduire, quand f et g sont indépendantes, une formule donnant l'intégrale

$$\int_E h(f(x), g(x))\, d\mu(x),$$

où $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction intégrable, comme une intégrale sur E^2.
g. Analyser le jeu de loto qui consiste à tirer successivement k boules numérotées parmi n, avec ou sans remise.
h. Analyser la situation décrite ci-dessous et répondre aux questions posées :

M. et Mme Lebesgue ont deux enfants. Quelle est la probabilité pour que le premier enfant soit une fille ? Quelle est la probabilité pour que le premier enfant soit une fille sachant que l'un des deux enfant s'appelle Sophie ? Quelle est la probabilité pour que le premier enfant soit une fille sachant que Sophie est la cadette ?
i. Si f et g sont deux variables aléatoires indépendantes, calculer en fonction de α et β la mesure image de μ par $f+g$.

Correction.
a. La formule de définition donne

$$\mu_E = \mu \quad \text{et} \quad \mu_{\{x\}} = \delta_x.$$

b. Supposons par exemple que A n'est pas négligeable. D'après la définition, A et B sont indépendantes si et seulement si la probabilité de B sachant A égale la probabilité de B, ce qui revient à dire que le fait de savoir que l'événement A s'est produit ne donne aucune information sur la probabilité d'occurence de l'événement B.
c. Supposons qu'une partie A est indépendante de toute partie B. En particulier, A est indépendante d'elle-même. Donc $\mu(A)^2 = \mu(A)$. Donc $\mu(A) = 0$ ou 1. La réciproque est immédiate.
d. Soit $\mathscr{A}$ la partition de E en deux bandes horizontales de hauteurs respectives a et $1-a$, $a \in]0,1[$, et soit $\mathscr{B}$ la partition de E en deux bandes verticales, de largeurs b et $1-b$, $b \in]0,1[$. Les deux tribus engendrées par $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ sont indépendantes.
e. Supposons que f et g sont indépendantes. Si $A \times B$ est un pavé mesurable de $\mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned}
((f,g)_*\mu)(A \times B) &= \mu\left((f,g)^{-1}(A \times B)\right) \quad \text{(par définition)} \\
&= \mu\left(f^{-1}(A) \cap g^{-1}(B)\right) \\
&= \mu\left(f^{-1}(A)\right) \mu\left(g^{-1}(B)\right) \quad \text{(parce que } f \text{ et } g \text{ sont indépendantes)} \\
&= \alpha(A)\beta(B) \quad \text{(par définition).}
\end{aligned}$$

Cette propriété caractérise la mesure produit $\alpha \otimes \beta$. Donc $(f,g)_*\mu = \alpha \otimes \beta$.

Le même calcul montre la réciproque.
f. On a :

$$\int_E h(f(x), g(x))\, d\mu(x)$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}^2} h(y_1, y_2)\, d((f,g)_*\mu)(y_1,y_2) \quad \text{(intégration par rapport à la mesure image)}\\
&= \int_{\mathbb{R}^2} h(y_1, y_2)\, d(\alpha\otimes\beta)(y_1,y_2) \quad \text{(parce que } f \text{ et } g \text{ sont indépendantes)}\\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} h(y_1, y_2)\, d\alpha(y_1)\right) d\beta(y_2) \quad \text{(théorème de Fubini)}\\
&= \int_{E} \left(\int_{E} h(f(x_1), g(x_2))\, d\mu(x_1)\right) d\mu(x_2)\\
&\qquad\qquad \text{(intégration par rapport à aux mesures images)}\\
&= \int_{E^2} h(f(x_1), g(x_2))\, d\mu^{\otimes 2}(x_1,x_2) \quad \text{(théorème de Fubini).}
\end{aligned}
$$

Donc, si f et g sont deux fonctions indépendantes, l'intégrale de n'importe quelle fonction $h(f,g)$ ne dépend pas du fait que l'on fait varier les arguments de f et de g de façon simultanée ou découplée.

g. À tout tirage on peut associer le k-uplet $x = (x_1, ..., x_k) \in \{1, ..., n\}^k$ du résultat. Soit donc $F = \{1, ..., n\}^k$. Il n'y a pas de raison a priori d'exclure de parties de F, donc on munit F de la tribu $\mathscr{P}(F)$.

Supposons d'abord que le tirage est avec remise. Après le tirage de chaque boule, le fait de remettre cette boule dans l'urne restaure l'état initial de l'urne. Autrement dit, la probabilité du j-ième tirage est indépendante du résultat des autres tirages. Donc, d'après la question précédente, la probabilité ν sur F est la puissance tensorielle k-ième de la mesure μ sur $\{1, ..., n\}$ qui, à la boule j, associe sa probabilité de tirage : $\nu = \mu^{\otimes n}$. Si μ est uniforme, ν est donc la mesure de comptage divisée par n^k :

$$\nu = \frac{1}{n^k} \sum_{x\in F} \delta_x.$$

Supposons maintenant que le tirage est sans remise. La mesure μ est uniforme sur les tirages x dont les composantes sont deux à deux distinctes, et nulle ailleurs :

$$\nu = \frac{(n-k)!}{n!} \sum_{x\in E, x_i\neq x_j} \delta_x.$$

Dans ce cas, on pourrait d'ailleurs restreindre E à l'ensemble des parties à k éléments de $\{1, ...n\}$.

h. L'espace probabilisé peut-être identifié à l'ensemble

$$E = \{f, g\}^2 = \{(x, y), x \in \{f, g\} \text{ et } y \in \{f, g\}\},$$

où f dénote une fille, g un garçon, x le premier enfant et y le second. Il est muni de la probabilité uniforme qui, à tout singeton $\{x, y\}$, associe la probabilité $\mu(\{x, y\}) = 1/4$.

L'énoncé suggère d'isoler les trois événements suivants :

$$\begin{cases} A = \{x = f\} = \{(f, f),\ (f, g)\}, & \mu(A) = 1/2\\ B = \{x = f\} \cup \{y = f\} = \{(g, g)\}^c, & \mu(B) = 3/4\\ C = \{y = f\} = \{(f, f),\ (g, f)\}, & \mu(C) = 1/2. \end{cases}$$

On vérifie que A et B ne sont pas indépendants, mais que A et C le sont, avec $C \subset B$. On voit :

$$\mu(A) = 1/2, \quad \mu_B(A) = 2/3, \quad \mu_C(A) = 1/2.$$

i. La mesure image de μ par $f + g$ vaut

$$
\begin{aligned}
(f+g)_*\mu &= (+\circ(f,g))_*\mu \quad (\text{où } + : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \text{ est l'addition})\\
&= +_*((f,g)_*\mu) \quad \text{par définition de la mesure image}\\
&= +_*(\alpha\otimes\beta) \quad \text{(parce que } f \text{ et } g \text{ sont indépendantes)}\\
&= \alpha * \beta \quad \text{(par définition du produit de convolution).}
\end{aligned}
$$

14. Exemples de produits de convolution.

a. Calculer $f * f$, où $f : x \mapsto x^{-2}\mathbb{1}_{[1,+\infty[}(x)$ sur $\mathbb{R}$.

b. Calculer la mesure convolée d'une mesure σ-finie μ et de la mesure de Lebesgue λ sur $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$. Que se passe-t-il si μ est une probabilité ?

c. Trouver une mesure σ-finie μ telle que pour toute mesure σ-finie ν on ait $\mu * \nu = \nu$.

Correction.

a. Soit $g(x) = f * f(x) = \int f(x-y)f(y)\,dy$.

Les réels $x - y$ et y sont symétriques par rapport à leur moyenne $x/2$. Or f est nulle sur $]-\infty, 1[$. Donc, si $x < 2$, pour tout $y \in \mathbb{R}$ on a $f(x-y)f(y) = 0$, donc $g(x) = 0$.

Si maintenant $x \geq 2$, le produit $f(x-y)f(y)$ est non nul si et seulement si $y \in [1, x-1]$, donc

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_1^{x-1} \frac{dy}{(x-y)^2 y^2} \\ &= \int_1^{x-1} \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{x-y}\right)^2 dy \\ &= \int_1^{x-1} \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{y^2} + \frac{1}{(x-y)^2} + \frac{2}{xy} + \frac{2}{x(x-y)}\right) dy \\ &= \frac{2}{x^2}\left(\frac{x-2}{x-1} + 2\frac{\ln(x-1)}{x}\right). \end{aligned}$$

Donc

$$f * f(x) = \frac{2}{x^2}\left(\frac{x-2}{x-1} + 2\frac{\ln(x-1)}{x}\right)\mathbb{1}_{[2,+\infty[}(x).$$

b. Par définition, la convolée de la mesure de Lebesgue λ et de μ vérifie, pour tout borélien A de $\mathbb{R}^d$,

$$\lambda * \mu\,(A) = \int \mathbb{1}_A(x+y)\,d(\lambda \otimes \mu)\,(x,y).$$

Comme la mesure de Lebesgue est invariante par translation, on a intérêt à intégrer d'abord dans la variable x, ce qui est possible grâce au théorème de Fubini :

$$\lambda * \mu\,(A) = \int \mu(dy) \int \mathbb{1}_A(x+y)\,\lambda(dx),$$

soit, en faisant pour tout $y \in \mathbb{R}^d$ fixé le changement de variables $x \mapsto h(x) = z = x + y$,

$$\lambda * \mu\,(A) = \int \mu(dy) \int \mathbb{1}_A(z)\,\lambda(dz) = \mu(\mathbb{R}^d)\lambda(A).$$

Donc $\lambda * \mu = \mu(\mathbb{R}^d)\lambda$.

En particulier, la convolée d'une mesure de probabilité quelconque avec la mesure de Lebesgue est la mesure de Lebesgue elle-même. Ceci fait de la mesure de Lebesgue un élément absorbant du produit de convolution.

c. La convolée sur $\mathbb{R}^d$ d'une mesure σ-finie ν avec une mesure de Dirac δ_x en $x \in \mathbb{R}^d$ est la mesure image de ν par la translation $\tau_x : y \mapsto y + x$. Donc pour toute mesure σ-finie ν on a $\delta_0 * \nu = \nu$.

15. Convolée de probabilités de Poisson *.

a. Calculer la convolée d'une mesure bornée sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ par la mesure de Dirac δ_x en $x \in \mathbb{R}$.

La mesure de probabilité de Poisson π_α de paramètre $\alpha > 0$ est définie par

$$\pi_\alpha = \sum_{n \in \mathbb{N}} e^{-\alpha}\frac{\alpha^n}{n!}\delta_n.$$

b. Montrer que cette somme infinie définit bien une mesure.
c. Calculer $\pi_\alpha * \pi_\beta$.

Correction.
a. Soit μ une mesure bornée sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$. Sa convolée par la mesure de Dirac δ_x en $x \in \mathbb{R}$ satisfait, pour tout borélien A de $\mathbb{R}$,

$$\mu * \delta_x(A) = \int_{\mathbb{R}} \mu(dy) \int_{\mathbb{R}} \delta_x(dz) \mathbb{1}_A(y+z) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A(x+y)\mu(dy) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A \circ \tau_x(y)\mu(dy),$$

où τ_x est la translation $y \mapsto x + y$. On peut pousser le calcul plus loin en remarquant que

$$\mu * \delta_x(A) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A(y)\, (\tau_{x*}\mu)(dy).$$

Autrement dit, $\mu * \delta_x$ est la mesure image de μ par la translation τ_x.
b. Pour tout borélien A de $\mathbb{R}$, la série numérique positive $\sum e^{-\alpha}\alpha^n/n!\ \delta_n(A)$ est majorée par la série convergente $\sum e^{-\alpha}\alpha^n/n!$ (de somme égale à 1). Donc la série de mesures $\sum e^{-\alpha}\frac{\alpha^n}{n!}\delta_n$ converge simplement vers une fonction numérique positive définie sur $\mathscr{B}(\mathbb{R})$, dont on vérifie qu'elle est σ-additive. Enfin, $\pi_\alpha(\mathbb{R}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} e^{-\alpha}\alpha^n/n! = 1$, donc il s'agit bien d'une probabiilté.
c. On a

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{m\in\mathbb{N}} e^{-\alpha}\frac{\alpha^m}{m!}\delta_m\right) * \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} e^{-\alpha}\frac{\alpha^n}{n!}\delta_n\right) \\
&= \sum_m \sum_n e^{-(\alpha+\beta)}\frac{\alpha^m\beta^n}{m!n!}\,\delta_m * \delta_n \quad \text{(théorème de Fubini-Tonelli)} \\
&= \sum_m \sum_n e^{-(\alpha+\beta)}\frac{\alpha^m\beta^n}{m!n!}\,\delta_{m+n} \quad \text{(d'après la question (a))} \\
&= \sum_p e^{-\alpha-\beta}\left(\sum_{n=0}^{p} \frac{\alpha^{p-n}\beta^n}{(p-n)!n!}\right)\delta_p \quad \text{(théorème de Fubini-Tonelli)} \\
&= \sum_p e^{-(\alpha+\beta)}\frac{(\alpha+\beta)^p}{p!}\,\delta_p \quad \text{(formule du binôme de Newton).}
\end{aligned}$$

Donc $\pi_\alpha * \pi_\beta$ est simplement la loi de Poisson $\pi_{\alpha+\beta}$ de paramètre $\alpha + \beta$.

Correction.
a. On obtient exactement les fonctions périodiques.
b.
c. Ce sont les fonctions périodiques de moyenne nulle.

CHAPITRE 5

Les espaces de fonctions intégrables

Sommaire

1. Application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Soient $(E, \mathscr{E}, \mu)$ un espace probabilisé et f et g deux fonctions borélienne, positives, intégrables et telles que $fg \geq 1$. Montrer que

$$\int_E f\, d\mu \cdot \int_E g\, d\mu \geq 1.$$

Correction. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$1 \leq \int_E 1\, d\mu \leq \int_E \sqrt{fg}\, d\mu \leq \sqrt{\int_E f\, d\mu} \cdot \sqrt{\int_E g\, d\mu}.$$

2. Convergence simple et convergence dans L^p. Soient $(E, \mathscr{E}, \mu)$ un espace mesuré, f une fonction de $L^1(E, \mathscr{E}, \mu)$ et $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de $L^1(E, \mathscr{E}, \mu)$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E f_n\, d\mu = \int_E f\, d\mu.$$

a. Montrer que si pour tout $n \geq 1$ la fonction f_n est positive et si la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge μ-presque partout vers f, alors $(f_n)_{n\geq 1}$ converge vers f dans L^1. On pourra considérer $g_n = \min(f, f_n)$.

On considère maintenant l'espace $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et la suite définie par

$$f_n = n\mathbb{1}_{]0,1/n[} - n\mathbb{1}_{]-1/n,0[}.$$

b. Montrer que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge vers 0 et que $\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n\, d\lambda = 0$.
c. La suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge-t-elle vers 0 dans L^p, $p \in [1, +\infty[$?

Correction.

a. Les hypothèses ne permettent pas de majorer de façon simple les fonctions $|f_n - f|$ par une fonction intégrable commune. Donc on ne peut pas appliquer directement le théorème de convergence dominée à $(|f_n - f|)_{n\geq 1}$.

Soit $g_n = \min(f, f_n)$. La suite $(g_n)_{n\geq 1}$ converge μ-presque partout vers f et elle est dominée par $f \in L^1$. Donc d'après le théorème de convergence dominée on a $\int_E g_n \, d\mu \to \int_E f \, d\mu$.

Or, $|f - f_n| = f + f_n - 2g_n$, donc :

$$\int_E |f_n - f| \, d\mu = \int_E f \, d\mu + \int_E f_n \, d\mu - 2\int_E g_n \, d\mu \to_{n\to+\infty} 0.$$

Donc $(f_n)_{n\geq 1}$ tend vers f dans L^1.

b. Pour tout $x \neq 0$, si n est assez grand, $|x| > 1/n$ et $f_n(x) = 0$. D'autre part, $f_n(0) = 0$ pour tout n. Donc $(f_n)_n$ tend simplement vers 0.

Par ailleurs, pour tout $n \geq 1$, on a $\int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda = 0$. Donc la limite de $\int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda$ est nulle quand $n \to +\infty$.

c. Soit $p \in [1, +\infty[$. Comme $\int_{\mathbb{R}} |f_n|^p \, d\lambda = 2n^{p-1}$ ne converge pas vers 0, $(f_n)_{n\geq 1}$ ne converge pas dans L^p.

3. Normes L^p. Soient $(E, \mathscr{E}, \mu)$ un espace probabilisé et f une fonction borélienne, positive et intégrable.

a. À l'aide de l'inégalité de Hölder, montrer que si $\mu(\{f > 0\}) < 1$ alors

$$\lim_{p\to 0^+} \|f\|_p = 0.$$

b. Montrer que

$$\lim_{p\to 0^+} \int_E f^p \, d\mu = \mu(\{f > 0\}).$$

c. Montrer que, pour tout $p \in]0, 1[$ et tout $x \in]0, +\infty[$,

$$\frac{|x^p - 1|}{p} \leq x + |\ln x|.$$

On suppose désormais que $f > 0$ et que $\ln f$ aussi est μ-intégrable.

d. Montrer que

$$\lim_{p\to 0^+} \int_E \frac{f^p - 1}{p} \, d\mu = \int_E \ln(f) \, d\mu.$$

e. Montrer que

$$\lim_{p\to 0^+} \|f\|_p = \exp\left(\int_E \ln(f) \, d\mu\right).$$

Correction.

a. Soit $p \in]0,1[$. Puisque $\frac{1}{1/p} + \frac{1}{1/(1-p)} = 1$, on a, par l'inégalité de Hölder,

$$\begin{aligned}\int_E f^p \, d\mu &= \int_E f^p \mathbb{1}_{\{f>0\}} \, d\mu \\ &\leq \left(\int_E (f^p)^{1/p} \, d\mu\right)^{1/(1/p)} \left(\int_E (\mathbb{1}_{\{f>0\}})^{1/(1-p)} \, d\mu\right)^{1/(1/(1-p))} \\ &\leq \left(\int_E f \, d\mu\right)^p \left(\int_E \mathbb{1}_{\{f>0\}} \, d\mu\right)^{1-p}.\end{aligned}$$

Donc, si $\mu(\{f>0\}) < 1$ on a

$$\|f\|_p \leq \left(\int_E f \, d\mu\right) (\mu(\{f>0\}))^{(1-p)/p} \to_{p\to 0^+} 0.$$

b. Si $p \in]0,1[$, on a $|f^p| \leq 1 + f$, où $1+f$ est intégrable. D'autre part, $f^p \to \mathbb{1}_{\{f>0\}}$ quand $p \to 0^+$. Donc, par le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{p\to 0^+} \int_E f^p \, d\mu = \int_E \mathbb{1}\{f>0\} \, d\mu = \mu(\{f>0\}).$$

c. Si $x \in]0,1[$, le théorème des accroissements finis donne : $x^0 - x^p = -p \ln x \, e^\xi$ pour un certain $\xi \in]p\ln x, 0[$. Donc : $\frac{|x^p-1|}{p} \leq |\ln x|$.

Si $x \in [1,+\infty[$, le même théorème des accroissements finis donne : $x^p - 1^p = (x-1)p\eta^{p-1}$ pour un certain $\eta \in]1,x[$. Donc : $\frac{|x^p-1|}{p} \leq x$.

Par conséquent, pour tout $x \in]0,+\infty[$, $\frac{|x^p-1|}{p} \leq x + |\ln x|$.

d. La famille de fonctions $\frac{f^p-1}{p}$ tend simplement vers $\ln f$ quand $p \to 0^+$. En outre, d'après la question précédente, on a

$$\left|\frac{f^p-1}{p}\right| \leq f + |\ln f|,$$

où, par hypothèse, $f + |\ln f|$ est intégrable. Donc d'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{p\to 0^+} \int_E \frac{f^p-1}{p} \, d\mu = \int_E \ln(f) \, d\mu.$$

e. Comme maintenant $\{f > °\} = E$, la question b montre que $\lim_{p\to 0^+} \int_E f^p \, d\mu = 1$.

D'autre part, pour tout $p \in]0,1[$, $\|f\|_p = \exp[\frac{1}{p} \ln \int_E f^p \, d\mu]$. Puisque $\ln x \sim x - 1$ quand $x \to 1$, on a, quand $p \to 0^+$,

$$\frac{1}{p} \ln \int_E f^p \, d\mu \sim \frac{1}{p}\left(\int_E f^p \, d\mu - 1\right) = \int_E \frac{f^p-1}{p} \, d\mu.$$

Donc la question d permet de conclure :

$$\lim_{p\to 0^+} \|f\|_p = \exp\left(\int_E \ln(f) \, d\mu\right).$$

4. Séries de Fourier dans L^2 *. Les séries de Fourier sont un cas particulier de la transformée de Fourier, mais on peut les étudier indpendemment.

Considérons l'intervalle $C = [0,1[$ muni de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue. On considère l'espace de Hilbert $L^2(C)$ des fonctions complexes, muni du produit scalaire complexe (produit hermitien) défini par

$$\langle \phi, \psi \rangle_{L^2} = \int_0^1 \phi(t)\bar{\psi}(t) \, dt.$$

Un tel produit hermitien définit naturellement une norme par la formule :

$$\|\phi\|_{L^2} = \sqrt{\langle \phi, \phi \rangle}.$$

On vérifiera ou on admettra que les résultats démontrés dans le Cours pour les espaces de Hilbert réels se transposent aux espaces de Hilbert complexes.

Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ la famille de fonctions définie par $e_n(t) = e^{in2\pi t}$.

a. Montrer que la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est orthonormée.

Considérons d'abord une fonction complexe ϕ définie sur C et indéfiniment dérivable. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on pose

$$c_n(\phi) = \langle \phi, e_n \rangle_{L^2} = \int_C \phi(t)\bar{e}_n(t)\, dt,$$

puis

$$S_N(\phi)(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(\phi)e_n(t).$$

b. Montrer en faisant deux intégrations par parties que la série de somme partielle $S_N(\phi)(t)$ converge.

c. Montrer que

$$S_N(\phi)(t) = \int_0^1 \phi(\theta)\frac{\sin\left(\pi(2N+1)(t-\theta)\right)}{\sin \pi(t-\theta)}\, d\theta.$$

d. En déduire que S_N converge vers ϕ uniformément sur C.

e. En déduire que si ϕ appartient à l'orthogonal de $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ alors $\phi = 0$. En admettant la densité de $C^\infty(C)$ dans $L^2(C)$, montrer que $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(C)$.

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $g \in L^2(C)$. Considérons l'équation

$$f(t+\alpha \pmod 1) - f(t) = g(t)$$

d'inconnue $f \in L^2(C)$.

f. Montrer que si α est rationnel, alors en général l'équation n'a pas de solution.

g. Donner un exemple avec $\alpha \notin \mathbb{Q}$ où l'équation admet une solution non constante.

h. (Difficile) Donner un exemple où l'équation admet une solution avec $\alpha \notin \mathbb{Q}$ et $g(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e_n(t)/2^n$.

Comme seconde application des séries de Fourier, on se propose de retrouver la formule classique suivante :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

i. Calculer les coefficients de Fourier de la fonction ϕ qui est impaire et 1-périodique, qui vaut 1 sur $[0, 1/2[$.
j. Exprimer $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ en fonction de $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2n+1}$.
k. En déduire le résultat cherché, en utilisant l'égalité de Parseval.

Correction.
a. La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est orthonormée : $\langle e_m, e_n\rangle = \delta_{m,n}$.
b. La convergence uniforme de la série $\sum c_n(\phi)e_n$ découle de la majoration :

$$|c_n(\phi)| = \left|\int_C \phi(t)e_n(t)\,dt\right| = \frac{1}{n^2}\left|\int_C \phi''(t)e_n(t)\,dt\right| \leq \frac{||\phi''||_{L^1}}{\sqrt{2\pi}n^2}.$$

c. On a

$$\begin{aligned} S_N(\phi)(t) &= \sum_{-N}^{N}\int_0^1 \phi(\theta)e^{-i2\pi n\theta}\,d\theta\, e^{i2\pi nt} \\ &= \int_0^n \phi(\theta)\sum_{N}^{N} e^{i2\pi n(t-\theta)}\,d\theta \\ &= \int_0^1 \phi(\theta)\frac{\sin\left(\pi(2N+1)(t-\theta)\right)}{\sin\pi(t-\theta)}\,d\theta. \end{aligned}$$

d. Comme

$$\sum_{-N}^{N} e^{i2\pi n\tau} = \frac{\sin\pi(2N+1)\tau}{\sin\pi\tau}$$

et, par intégration,

$$1 = \sum_{-N}^{N}\int_C e_n(t)\,dt = \int_C \frac{\sin\pi(2N+1)\tau}{\sin\pi\tau}\,d\tau,$$

on a

$$\phi(t) - S_N(t) = \int_C \frac{\phi(t)-\phi(\theta)}{\sin\pi(t-\theta)}\sin\pi(2N+1)(t-\theta)\,d\theta.$$

Posons

$$\psi_t(\theta) = \frac{\phi(t)-\phi(\theta)}{\sin\pi(t-\theta)}.$$

Comme ϕ est indéfiniment dérivable, la fonction $(\theta, t)\mapsto \psi_t(\theta)$ est indéfiniment dérivable et l'on a :

$$\begin{aligned} |\phi(t) - S_N(t)| &= \left|\int_C \psi_t(\theta)\sin\pi(2N+1)(t-\theta)\,d\theta\right| \\ &= \frac{1}{\pi^2(2N+1)^2}\left|\int_C \psi_t''(\theta)\sin\pi(2N+1)(t-\theta)\,d\theta\right| \leq \frac{\sup_{t,\theta}|\psi_t''(\theta)|}{\pi^2(2N+1)^2}. \end{aligned}$$

Donc la suite $(\sum_{-N}^{N} c_n(\phi)e_n)_{N\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction ϕ sur C.

e. Soit $\phi \in L^2(C)$ appartenant à l'orthogonal de la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Ses coefficients de Fourier $c_n(\phi)$ sont tous nuls. D'après la question précédente, ϕ elle-même est donc nulle.

Soit maintenant f une fonction appartenant à l'orthogonal de $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ dans $L^2(C)$. Comme la convergence uniforme implique la convergence dans L^2, pour toute fonction $\phi \in C^\infty(C)$ on a

$$\langle \phi, f\rangle_{L^2} = \left\langle \sum_{\mathbb{Z}} c_n(\phi) e_n, f \right\rangle_{L^2} = \sum_{\mathbb{Z}} c_n(\phi) \langle e_n, g\rangle_{L^2} = 0.$$

Donc f appartient à l'orthogonal de $C^\infty(C)$ dans $L^2(C)$. En admettant que $C^\infty(C)$ est dense dans $L^2(C)$ (ce qui se montre en construisant des opérateurs de lissage, par convolution avec des fonctions plateau), on voit que forcément $f = 0$.

Donc $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(C)$.

f. Si f et g sont dans $L^2(C)$ et satisfont dt-presque partout l'égalité

$$f(t+\alpha) - f(t) = g(t),$$

la fonction $t \mapsto f(t+\alpha) - f(t) - g(t)$ appartient à L^2 et y vaut 0. Donc ses coefficients de Fourier sont tous nuls : pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a

$$c_n(f)\left(e^{in\alpha} - 1\right) = c_n(g).$$

Maintenant supposons que α est rationnel : il existe un entier relatif n tel que $n\alpha \in \mathbb{Z}$, donc tel que $e^{in\alpha} = 1$. Il suffit de supposer que le n-ième coefficient de Fourier de g n'est pas nul pour aboutir à une contradiction.

g. Si g est la fonction $t \mapsto \sin 2\pi t$ et si $\alpha = 1/2$, alors $f : t \mapsto -1/2 \sin 2\pi t$ est solution. Ici, $\alpha = 1/2$ est rationnel mais la fonction g n'a pas d'harmonique correspondant à $n = 2$.

h. Si $g(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e_n(t)/2^n$ et $\alpha \notin \mathbb{Q}$, on peut résoudre formellement pour tout n l'équation

$$c_n(f)\left(e^{in\alpha} - 1\right) = c_n(g).$$

en posant

$$c_n(f) = \frac{1}{2^n\left(e^{in\alpha} - 1\right)}.$$

Pour que la formule

$$f(t) = \sum_{\mathbb{Z}} c_n(f) e^{i2\pi nt}$$

définisse bien une solution dans $L^2(C)$, il faut encore que cette série converge dans L^2, c'est-à-dire que l'on ait :

$$\sum_{\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \sum_{\mathbb{Z}} \left| \frac{1}{2^n\left(e^{in\alpha} - 1\right)} \right|^2 < \infty.$$

Cette inégalité est liée aux propriétés arithmétiques de α : il faut que $n\alpha/2\pi$ ne soit pas trop proche d'un entier en fonction de ce que 2^n est grand. Une façon simple de montrer qu'il existe de tels nombres α est de montrer qu'il en existe un ensemble de mesure strictement positive, donc une infinité non dénombrable. Soit $D_{\gamma,\tau}$ le borélien de $\mathbb{R}$ défini par :

$$D_{\gamma,\tau} = \left\{ \alpha \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{Z}_* \ \forall k \in \mathbb{Z}\ |n\alpha - 2k\pi| \geq \frac{\gamma}{|n|^\tau} \right\}.$$

Un calcul élémentaire montre que si τ est suffisamment grand et γ suffisamment petit alors $D_{\gamma,\tau}$ est de mesure strictement positive. Il suffit donc de choisir α dans un tel ensemble, puisqu'alors on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 &\leq \sum_{\mathbb{Z}} \frac{1}{2^{2n}} \frac{1}{(1-\cos n\alpha)^2} \\
&\leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2^{2n}} \left(\frac{\pi}{\min_{k\in\mathbb{Z}} |n\alpha - 2k\pi|} \right)^2 \\
&\quad \text{car } 1 - \cos x \geq \frac{x^2}{\pi} \text{ pour tout } x \in [-\pi, \pi] \text{ (mais pas sur } \mathbb{R}\text{ !)} \\
&\leq \left(\frac{\pi}{\gamma}\right)^2 \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{|n|^{2\tau}}{2^{2n}} < \infty.
\end{aligned}$$

i. Un calcul direct montre que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a

$$c_{2n} = 0 \quad \text{et} \quad c_{2n+1} = \frac{-2i}{\pi(2n+1)}.$$

j. On a

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{4n^2} + \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2n+1},$$

donc

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{4}{3} \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2n+1}.$$

k. L'égalité de Parseval s'écrit

$$\|\phi\|_{L^2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2,$$

soit

$$1 = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Donc $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2n+1} = \pi^2/8$, et, d'après la question précédente,

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

5. Espérance conditionnelle et théorème ergodique de Birkhoff

***.** Soient $(E, \mathscr{E}, \mu)$ un espace de probabilité et $\mathscr{F}$ une sous-tribu de $\mathscr{E}$ (c'est-à-dire une tribu incluse dans $\mathscr{E}$). Soit $\mu_{\mathscr{F}}$ la restriction de μ à la sous-tribu $\mathscr{F}$; autrement dit, si π est l'identité de $(E, \mathscr{E})$ dans $(E, \mathscr{F})$, $\mu_{\mathscr{F}}$ est la mesure image de μ par π. Nous noterons $L^p(\mathscr{E}) = L^p(E, \mathscr{E}, \mu)$ et $L^p(\mathscr{F}) = L^p(E, \mathscr{F}, \mu_{\mathscr{F}})$.

a. Montrer que si $\psi \in L^1(\mathscr{F})$ alors

$$\int_E \psi \, d\mu_{\mathscr{F}} = \int_E \psi \, d\mu.$$

b. Montrer que $L^2(\mathscr{F})$ est un sous-espace vectoriel fermé de $L^2(\mathscr{E})$.

c. En déduire que pour toute fonction $\psi \in L^2(\mathscr{E})$ il existe une fonction qui est unique presque partout, que nous noterons $\psi_{\mathscr{F}}$, telle que $\psi - \psi_{\mathscr{F}}$ soit dans l'orthogonal de $L^2(\mu_{\mathscr{F}})$.

En théorie des Probabilités, la fonction $\psi_{\mathscr{F}}$ est appelée l'*espérance conditionnelle* de ψ relativement à la tribu $\mathscr{F}$.

d. En utilisant le théorème de Radon–Nikodym, montrer de même que pour toute fonction $\psi \in L^1(\mathscr{E})$ il existe une fonction $\psi_{\mathscr{F}} \in L^1(\mathscr{F})$ unique presque partout, telle que pour toute partie $A \in \mathscr{F}$ on a

$$\int_A \psi \, d\mu = \int_A \psi_{\mathscr{F}} \, \mu_{\mathscr{F}}.$$

e. Calculer $\psi_{\mathscr{F}}$ quand $\mathscr{F}$ est la tribu engendrée par une partition mesurable $\mathscr{A}$, en supposant que l'union des parties $A \in \mathscr{A}$ qui sont μ-négligeables est néligeable. Décrire les cas particulier où $\mathscr{F}$ est respectivement la tribu grossière $\{\emptyset, E\}$ et la tribu engendrée par le singleton $\{A\}$, A étant une partie donnée $\mathscr{E}$-mesurable de E.
f. Calculer $\psi_{\mathscr{F}}$ quand $E = [0,1]$, $\mathscr{E} = \mathscr{B}([0,1])$ et quand $\mathscr{F}$ est la tribu engendrée par l'ensemble des singletons de $[0,1]$.
g. Montrer la version générale du *théorème ergodique de Birkhoff* :

Si $f : E \to E$ est une application $\mathscr{E}$-mesurable préservant la probabilité μ (c'est-à-dire $f_*\mu = \mu$) et si $\psi \in L^1(\mathscr{E})$, quand n tend vers $+\infty$ on a

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \psi(f^k(x)) \to \psi_{\mathscr{I}} \quad \mu\text{-presque partout},$$

où $\mathscr{I} = \{A \in \mathscr{E},\ f^{-1}(A) = A\}$ est la *tribu invariante* de f.

On adaptera l'Exercice correspondant du Chap. 3 (où l'on supposait f ergodique, et où la tribu invariante $\mathscr{I}$ était donc la tribu grossière), en posant notamment, à la fin, $\varphi = \psi - \psi_{\mathscr{I}} - \varepsilon$.
h. Vérifier directement la validité du théorème de Birkhoff dans le cas où $E = \{1, ..., n\}$, $n \in \mathbb{N}_*$, $\mathscr{E} = \mathscr{P}(E)$, et f est une permutation de E se décomposant éventuellement en plusieurs cycles.

Correction.
a. Soient $\psi^{\pm}$ les parties positive et négative de ψ.

Soit $(\psi_n^{\pm})$ une suite croissante de fonctions $\mathscr{F}$-mesurables positives, qui admette $\psi^{\pm}$ pour limite. D'après le théorème de convergence monotone,

$$\int \psi^{\pm}\, d\mu_{\mathscr{F}} = \lim_n \uparrow \int \psi_n^{\pm}\, d\mu_{\mathscr{F}}.$$

Comme les fonctions $\psi_n^{\pm}$ sont $\mathscr{F}$-mesurables et étagées, elles sont $\mathscr{E}$-mesurables et leur intégrale par rapport à μ égale leur intégrale par rapport à $\mu_{\mathscr{F}}$.

Donc

$$\int_E \psi\, d\mu_{\mathscr{F}} = \int_E \psi\, d\mu.$$

b. Les définitions ont pour conséquence directe que $L^2(\mathscr{F})$ est un sous-espace vectoriel de $L^2(\mathscr{E})$.

De plus, soit $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $L^2(\mathscr{F})$ qui converge dans $L^2(\mathscr{E})$ vers une certaine fonction ψ : $\int_E |\psi_n - \psi|^2\, d\mu \to 0$. En particulier, la suite $(\psi_n)_n$ est de Cauchy dans $L^2(\mathscr{E})$, donc aussi dans $L^2(\mathscr{F})$, d'après la question précédente.

Or $L^2(\mathscr{F})$ est un espace complet, donc $(\psi_n)_n$ converge vers une certaine fonction $\tilde{\psi}$ dans $L^2(\mathscr{F})$. Mais $\tilde{\psi} \in L^2(\mathscr{E})$, et, d'après l'unicité de la limite dans $L^2(\mathscr{E})$, on a $\tilde{\psi} = \psi$. Donc la limite ψ de $(\psi_n)_n$ appartient à $L^2(\mathscr{F})$, qui est donc un sous-espace fermé.
c. Pour toute fonction $\psi \in L^2(\mathscr{E})$ il existe une unique classe d'équivalence de fonctions, que nous noterons $\psi_{\mathscr{F}}$, telle que $\psi - \psi_{\mathscr{F}}$ soit dans l'orthogonal de $L^2(\mathscr{F})$. Autrement dit, $\psi_{\mathscr{F}}$ est la projection de ψ sur $L^2(\mathscr{F})$.

d. Soit $\psi \in L^1(\mathscr{E})$. Quitte à prendre successivement les parties positive et négative de ψ, on peut supposer que ψ est positive. Notons ν_ψ la mesure définie sur $\mathscr{F}$ de densité ψ par rapport à μ :

$$\nu_\psi(A) = \int_A \psi \, d\mu.$$

La mesure ν_ψ, restreinte à $\mathscr{F}$, est absolument continue par rapport à $\mu_{\mathscr{F}}$, donc d'après le théorème de Radon-Nikodym il existe une fonction (précisément, une classe de fonctions) $\psi_{\mathscr{F}} \in L^1(\mathscr{F})$ telle que $\nu_\psi = \psi_{\mathscr{F}} \bullet \mu_{\mathscr{F}}$. Alors, pour toute partie $A \in \mathscr{F}$ on a

$$\int_A \psi \, d\mu = \int_A \psi_{\mathscr{F}} \, \mu_{\mathscr{F}}.$$

e. Soit $\mathscr{F}$ la tribu engendrée par une partition $\mathscr{A} \subset \mathscr{E}$. Soit $A \in \mathscr{A}$ une classe de la partition. Comme $\pi_{\mathscr{F}}$ est $\mathscr{F}$-mesurable, $\psi_{\mathscr{F}}$ est constante sur A. De plus,

$$\int_A \psi \, d\mu = \int_A \psi_{\mathscr{F}} \, d\mu_{\mathscr{F}} = \psi_{\mathscr{F}}|_A \mu(A).$$

Si A n'est pas μ-négligeable, la valeur constante de $\psi_{\mathscr{F}}$ en restriction à A est donc

$$\psi_{\mathscr{F}}|_A = \frac{\int_A \psi \, d\mu}{\mu(A)}.$$

Si $\mathscr{F}$ est la tribu grossière $\{\emptyset, E\}$, la fonction $\psi_{\mathscr{F}}$ est simplement la fonction constante égale à l'intégrale de ψ sur E.

Supposons maintenant que $\mathscr{F}$ est la tribu $\{\emptyset, A, A^c, E\}$ engendrée par un singleton $\{A\}$, $A \in \mathscr{E}$. Considérons la fonction définie sur E par :

$$\psi_0 : x \mapsto \begin{cases} \int_A \psi \, d\mu & \text{si } x \in A \\ \int_{A^c} \psi \, d\mu & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ses ensembles de niveaux sont A et A^c, donc elle est mesurable de $(E, \mathscr{F})$ dans $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$. Par ailleurs, son intégrale sur A ou sur A^c coïncide avec celle de ψ. Donc, par unicité, $\psi_{\mathscr{F}} = \psi_0$ (égalité entre classes d'équivalence de fonctions). Remarquons que par exemple si A est μ-négligeable, alors $\psi_{\mathscr{F}}$ n'est *pas* unique en tant que fonction, puisque $\psi_{\mathscr{F}}$ peut en fait prendre n'importe quelles valeurs sur A.

f. Comme $\psi_{\mathscr{F}}$ est $\mathscr{F}$-mesurable, pour toute partie borélienne B de $\mathbb{R}$, l'ensemble ${\psi_{\mathscr{F}}}^{-1}(B)$ est dénombrable ou de complémentaire dénombrable ; donc ${\psi_{\mathscr{F}}}^{-1}(B)$ est de mesure nulle ou égale à 1. Donc $\psi_{\mathscr{F}}$ est constante presque partout. Donc $\psi_{\mathscr{F}}$ est la moyenne de ψ sur E.

g. La démonstration de l'Exercice correspondant d'un chapitre précédent s'adapte mot pour mot. La fonction $\psi_{\mathscr{I}}$ est constante μ-presque partout sur toutes les parties f-invariantes minimales.

h. Soit f une permutation de $E = \{1, ..., n\}$.

La tribu invariante $\mathscr{I}$ de f est la tribu engendrée par la partition $\mathscr{P}$ de E formée par les cycles de f. L'espérance conditionnelle d'une fonction ψ sur E est donc la fonction $\psi_{\mathscr{I}}$ qui, à tout x de E, associe la moyenne de ψ sur le cycle de x :

$$\psi_{\mathscr{I}}(x) = \frac{1}{N_0} \sum_{k=0}^{N_0-1} \psi(f^k(x)),$$

où l'on a noté N_0 l'ordre de x, c'est-à-dire le plus petit entier naturel tel que $f^{N_0}(x) = x$.

Soit $x \in E$, et notons toujours $N_0 \in \mathbb{N}$ l'ordre de x. Calculons un équivalent, quand N tend vers $+\infty$, de la somme partielle de Birkhoff de x à un ordre $N \in \mathbb{N}_*$, en notant n le quotient entier de N par N_0 et r le reste de cette division ($N = nN_0 + r$) :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\psi(f^k(x)) &= \frac{1}{N}\left(\sum_{k=0}^{nN_0}\psi(f^k(x)) + \sum_{k=1}^{r}\psi(f^{nN_0+k}(x))\right)\\
&= \frac{1}{N}\left(\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=jN_0}^{(j+1)N_0-1}\psi(f^k(x)) + \sum_{k=1}^{r}\psi(f^{nN_0+k}(x))\right)\\
&= \frac{1}{N}\left(\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{N_0-1}\psi(f^k(x)) + \sum_{k=1}^{r}\psi(f^{nN_0+k}(x))\right)\\
&= \frac{1}{nN_0 + r}\left(n\sum_{k=0}^{N_0-1}\psi(f^k(x)) + \sum_{k=1}^{r}\psi(f^{nN_0+k}(x))\right)\\
&= \frac{1}{N_0 + r/n}\left(\sum_{k=0}^{N_0-1}\psi(f^k(x)) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{r}\psi(f^{nN_0+k}(x))\right)\\
&\sim \frac{1}{N_0}\sum_{k=0}^{N_0-1}\psi(f^k(x)),
\end{aligned}$$

où la dernière ligne résulte en particulier de ce que

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{r}\psi(f^{nN_0+k}(x))\right| \leq \frac{r}{n}\max_{y\in E}|\psi(y)| \leq \frac{N_0-1}{n}\max_{y\in E}|\psi(y)| \to_{N\to+\infty} 0.$$

On a donc vérifié directement, dans ce cas particulier, le théorème de Birkhoff :

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\psi(f^k(x)) \to \psi_{\mathscr{I}}(x) = \frac{1}{N_0}\sum_{k=0}^{N_0-1}\psi(f^k(x)) \quad \text{quand } n \to +\infty.$$

CHAPITRE 6

La transformée de Fourier

Sommaire

Dans les corrections, on choisit la normalisation suivante pour la transformée de Fourier :

$$\widehat{v}(\xi) = \int v(x) e^{-i2\pi\, x\cdot\xi}\, dx.$$

Le passage d'une normalisation à une autre n'implique généralement que des constantes multiplicatives dont le calcul est facile.

1. Calculs et propriétés élémentaires.

a. Calculer la transformée de Fourier de la mesure de Dirac δ_1.
b. Soient $a > 0$ un réel et f la fonction *train d'onde* $f : x \mapsto \sin x\, \mathbb{1}_{[-a,a]}(x)$. Calculer la transformée de Fourier de la fonction f. Décrire en une phrase ce qui se passe quand a tend vers $+\infty$.
c. Calculer les transformées de Fourier sur $\mathbb{R}$ de $f : x \mapsto e^{-|x|}$ et de $g : x \mapsto 1/(1 + x^2)$.
d. Montrer qu'il n'existe pas de fonction $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ telle que pour toute fonction $g \in L^1(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ on ait $f * g = g$.
e. Calculer la transformée de Fourier de la mesure de surface de la sphère de rayon $R > 0$ dans $\mathbb{R}^3$.

Correction.
a. La transformée de Fourier de la mesure de Dirac δ_1 est la fonction

$$\phi : u \mapsto \int e^{-i2\pi xu}\, d\delta_1(x) = e^{-i2\pi u}.$$

b. En utilisant le fait que $\sin x = (e^{ix} - e^{-ix})/(2i)$, un calcul direct montre que la transformée de Fourier du train d'onde est la fonction ϕ telle que

$$\phi(u) = \int_{-a}^{a} \sin x\, e^{-i2\pi xu}\, du = -ia(\text{sinc }(2\pi a(1+u)) + \text{sinc }((2\pi a(1-u))),$$

où sinc : $v \mapsto \sin v/v$ si $v \neq 0$, $0 \mapsto 1$, est la fonction *sinus cardinal*. Quand $a \to +\infty$, le graphe de ϕ montre deux pics de plus en plus aigus et étroits en $u = 1$ et $u = -1$, qui correspondent aux deux harmoniques de la fonction $x \mapsto \sin x = (e^{ix} - e^{-ix})/2i$.

c. On a

$$\hat{f}(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{-|x|} e^{-2i\pi ux}\, dx = \int_{-\infty}^{0} e^{(1-2i\pi u)x}\, dx + \int_{0}^{\infty} e^{-(1+2i\pi u)x}\, dx,$$

donc

$$\hat{f}(u) = \frac{1}{1-2i\pi u} + \frac{1}{1+2i\pi u} = \frac{2}{1+4\pi^2 u^2}.$$

Posons $h(x) = \dfrac{2}{1+4\pi^2 x^2}$, $x \in \mathbb{R}$. La fonction h est intégrable relativement à la mesure de Lebesgue. Par la formule d'inversion des transformées de Fourier, $f(x) = \hat{h}(-x)$ presque partout, donc partout puisque ces fonctions sont continues. Or, h est une fonction paire, donc $f(x) = \hat{h}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par conséquent,

$$\hat{g}(u) = \pi \hat{h}(2\pi u) = \pi f(2\pi u) = \pi e^{-2\pi |u|}.$$

d. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ une fonction telle que pour toute fonction $g \in L^1(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ on ait $f * g = g$. On a $\hat{g} = \hat{f}\hat{g}$. Prenons $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2)$, $x \in \mathbb{R}$. Or on a $\hat{g}(u) = \exp(-2\pi^2 u^2) \neq 0$. Donc pour tout $u \in \mathbb{R}$ on a $\hat{f}(u) = 1$. Or on a $\lim_{\infty} \hat{f} = 0$, ce qui est absurde.

Donc il n'existe pas de fonction $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ telle que pour toute fonction $g \in L^1(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ on ait $f * g = g$.

e. La mesure de surface de la sphère de rayon R est la mesure σ_R image par l'application coordonnées sphériques $(\theta, \varphi) \mapsto (R \sin\varphi \cos\theta, R \sin\varphi \sin\theta, R\cos\varphi)$ de la mesure $R^2 |\sin\varphi|\, d\varphi\, d\theta$ (voir l'exercice sur les intégrales de surfaces). Elle est finie de masse (surface) totale $4\pi R^2$.

Sa transformée de Fourier vaut

$$\widehat{\sigma_R}(\xi) = \int_{|x|=R} e^{-i2\pi\, x\cdot\xi}\, d\sigma_R(x).$$

Un vecteur ξ étant donné, on peut toujours définir les coordonnées sphériques de façon à ce que ξ soit sur l'axe $\varphi = 0$ (ce qui revient à dire que σ_R est invariante par rotation). Alors la formule d'intégration par rapport à une mesure image montre que l'on a

$$\widehat{\sigma_R}(\xi) = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i2\pi R|\xi| \cos\varphi} R^2 \sin\varphi\, d\theta\, d\varphi = 2R^2 \frac{\sin(R|\xi|)}{R|\xi|},$$

ou encore, pour la surface unité sur la sphère,

$$\widehat{\frac{\sigma_R}{4\pi R^2}}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(R|\xi|)}{R|\xi|}.$$

2. Régularité de la transformée de Fourier. Soit μ une mesure finie sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$.

a. Si la fonction identité x est dans $L^1(\mu)$, montrer que $\hat{\mu}$ est de classe C^1 et que

$$\hat{\mu}'(u) = -2i\pi \int_{\mathbb{R}} x e^{-2i\pi ux}\, \mu(dx).$$

b. Si la fonction identité x est dans $L^2(\mu)$, montrer que $\hat{\mu}$ est de classe C^2 et que

$$\hat{\mu}''(u) = -4\pi^2 \int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-2i\pi ux}\, \mu(dx).$$

Correction.

a. Par définition, $\hat{\mu}(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi ux}\,\mu(dx)$. Or, $\dfrac{\partial}{\partial u} e^{-2i\pi ux} = -2i\pi x e^{-2i\pi ux}$, et, pour tout $u \in \mathbb{R}$, $\left|\dfrac{\partial}{\partial u} e^{-2i\pi ux}\right| \leq 2\pi x$, cette dernière fonction, par hypothèse, étant intégrable. Donc d'après le théorème de dérivation sous l'intégrale, $\hat{\mu}$ est dérivable et sa dérivée vaut

$$\hat{\mu}'(u) = -2i\pi \int_{\mathbb{R}} x\, e^{-2i\pi ux}\,\mu(dx).$$

La même Proposition, appliquée cette fois à $\hat{\mu}'$, affirme que $\hat{\mu}'$ est continue.
b. Le raisonnement est identique au niveau de dérivation suivant.

4. Non surjectivité de la transformation de Fourier. Soit

$$\theta(x) = \int_1^x \frac{e^{-i2\pi u}}{u}\,dx, \quad x \in \mathbb{R}.$$

a. Montrer que la fonction θ est continue sur $\mathbb{R}$ et qu'elle possède une limite finie à l'infini.
b. Montrer que, si f est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ et si $\widehat{f}$ est sa transformée de Fourier, l'expression

$$\phi(\Xi) = \int_1^{\Xi} \frac{\widehat{f}(\xi)}{\xi}\,d\xi$$

a une limite finie quand Ξ tend vers $+\infty$.

Soit g la fonction paire définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq 1 \\ 1/\ln x & \text{si } |x| \geq 1. \end{cases}$$

c. Montrer que g est continue et tend vers 0 en $\pm\infty$, mais que g n'est la transformée de Fourier d'aucune fonction intégrable.

Correction.
a. Cette question a déjà été traitée dans les chapitres sur les passages à la limites et sur le théorème de Fubini.
b. On a

$$\phi(\Xi) = \int_1^{\Xi} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)e^{-i2\pi x\xi}}{\xi}\,dx \right) d\xi.$$

Comme f est intégrable sur $\mathbb{R}$, la fonction $(x, \xi) \mapsto f(x)e^{-i2\pi x\xi}/\xi$ est intégrable sur $\mathbb{R} \times [1, \xi]$. D'après le théorème de Fubini on a donc

$$\phi(\Xi) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_1^{\Xi} \frac{e^{-i2\pi\, x\xi}}{\xi}\,d\xi \right) f(x)\,dx$$

et, d'après la formule du changement de variable,

$$\phi(\Xi) = \int_{\mathbb{R}} (\theta(\Xi x) - \theta(x)) f(x)\,dx.$$

D'après la première question et d'après le théorème de convergence dominée, ϕ a donc une limite finie en l'infini.

c. Supposons par l'absurde qu'il existe une fonction intégrable f dont la transformée de Fourier soit g. D'après la question précédente, la fonction ϕ associée a une limite finie en $+\infty$. Or, pour $\Xi \geq 1$,

$$\phi(\Xi) = \int_1^{\Xi} \frac{d\xi}{\xi \ln \xi},$$

et cette intégrale (de Bertrand) diverge. Donc g n'est pas une transformée de Fourier.

5. Équation de propagation. Si $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x,t) \mapsto f(x,t)$ est l'amplitude d'une onde (de nature électromagnétique, acoustique, etc.) vue comme une fonction des variables spatiale et temporelle x et t, on montre en Physique que sous certaines hypothèses f est de classe C^2 et satisfait à l'*équation de propagation*

$$\Delta f - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0,$$

où c est une constante, la *célérité*, qui dépend de la nature de l'onde et du milieu dans lequel l'onde se propage, et Δ est l'opérateur *laplacien* : $\Delta f(x,t) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + ... + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$.

L'expérience montre en outre que l'on peut librement imposer l'amplitude $f_0(x) = f(x,0)$ et et sa dérivée temporelle $g_0(x) = \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,0)$ à l'instant $t = 0$.

La clef de la résolution de cette équation de propagation est d'introduire la transformée de Fourier *spatiale* de f, c'est-à-dire la fonction

$$\hat{f} : (u,t) \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2i\pi\langle u,x\rangle} f(x,t)\, dx.$$

Nous supposerons que les fonctions $u \mapsto (1+||u||^2)\hat{f}(u,t)$, $\dfrac{\partial \hat{f}}{\partial t}(\cdot,t)$ et $\dfrac{\partial^2 \hat{f}}{\partial t^2}(\cdot,t)$ sont intégrables sur $\mathbb{R}^n$ par rapport à la variable u pour tout $t \in \mathbb{R}$.

a. Trouver l'équation et les conditions initiales satisfaites par $\hat{f}$ et déterminer $\hat{f}$ en fonction de $\hat{f}_0$ et $\hat{g}_0$.

b. Écrire f presque partout sous la forme de l'intégrale d'une fonction dépendant de f_0 et de g_0.

Correction.

a. Par hypothèse, $(1+||u||^2)\hat{f}$ est $\lambda_n(du)$-intégrable, donc $\hat{f}$ elle-même l'est, et d'après le théorème d'inversion de Fourier on a

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2i\pi\langle u,x\rangle} \hat{f}(u,t)\, du.$$

En outre, $||u||\,|\hat{f}| \leq (1+||u||^2)\hat{f}$ donc $||u||\,\hat{f}$ aussi est intégrable. Donc f est différentiable (ce que l'on avait supposé), et surtout ses dérivées s'écrivent

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2i\pi\langle u,x\rangle}(2i\pi u_j)\hat{f}(u,t)\,du.$$

Mais l'hypothèse selon laquelle $(1+||u||^2)\hat{f}$ est $\lambda_n(du)$-intégrable permet de dériver cette expression sous l'intégrale une fois de plus, et de trouver :

$$\Delta f(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2i\pi\langle u,x\rangle}(-4\pi^2||u||^2)\hat{f}(u,t)\,du.$$

Un raisonnement analogue montre que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2i\pi\langle u,x\rangle}\frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial t^2}(u,t)\,du.$$

Donc

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{2i\pi\langle u,x\rangle}\left(-4\pi^2||u||^2\hat{f}(u,t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\hat{f}}{\partial t^2}(u,t)\right)du = 0.$$

On a donc

$$4\pi^2c^2||u||^2\hat{f}(u,t) + \frac{\partial^2\hat{f}}{\partial t^2}(u,t) = 0$$

du-presque partout, pour tout $t \in \mathbb{R}$. Cette équation est une famille paramétrée par u d'équations différentielles de fonction inconnue $\hat{f}(u,\cdot)$. Sa solution générale s'écrit

$$\hat{f}(u,t) = a(u)\exp(2i\pi c||u||t) + b(u)\exp(-2i\pi c||u||t),$$

où a et b sont deux fonctions réelles ne dépendant que de u.

Or $\hat{f}$ vérifie les conditions initiales :

$$\hat{f}(\cdot,0) = \hat{f}_0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial\hat{f}}{\partial t}(\cdot,0) = \hat{g}_0.$$

Donc

$$a+b = \hat{f}_0 \quad \text{et} \quad 2i\pi c||u||(a-b) = \hat{g}_0,$$

soit

$$\hat{f}(u,t) = \hat{f}_0(u)\cos(2\pi c||u||t) + \frac{\hat{g}_0}{2\pi c||u||}\sin(2\pi c||u||t).$$

b. Si $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, on a

$$f(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2i\pi\langle u,x\rangle}\left(\hat{f}_0(u)\cos(2\pi c||u||t) + \frac{\hat{g}_0}{2\pi c||u||}\sin(2\pi c||u||t)\right)du.$$

N.B. : Cette formule garde un sens quand $\hat{f}_0$ et $\hat{g}_0$ sont intégrables, sans hypothèses de régularité supplémentaires sur f. En particulier, si on définit la fonction f par cette égalité, f n'a pas de raison, en général, d'être de classe C^2. Une telle fonction s'appelle une *solution faible* de l'équation de propagation.

6. Équation de diffusion de la chaleur. Soit $u : \mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ à support compact satisfaisant l'*équation de la chaleur*

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \Delta u(t,x)$$

pour tous $t \in \mathbb{R}^+$ et $x \in \mathbb{R}^n$, où $\Delta u(t,x) = \sum_{1\leq j\leq n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(t,x)$ dénote le laplacien de u. On suppose de plus que u satisfait la condition initiale $u(0,x) = \varphi(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, où $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^∞ à support compact.

On appellera *transformée de Fourier spatiale* de u et on notera $\widehat{u} : \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(t, \xi) \mapsto \widehat{u}(t, \xi)$ la fonction, si elle existe, telle que pour tout $t > 0$ la fonction $\widehat{u}(t, \cdot) : \xi \mapsto \widehat{u}(t, \xi)$ soit la transformée de Fourier de la fonction $u(t, \cdot) : x \mapsto u(t, x)$.

a. Justifier l'existence des fonctions $\widehat{u}$, $\widehat{\Delta u}$ et $\widehat{\dfrac{\partial u}{\partial t}}$.
b. Montrer en intégrant par parties qu'il existe un réel $c > 0$ (qui dépend de la normalistion choisie pour la transformation de Fourier) tel que $\widehat{\Delta u}(t, \xi) = -c \left\|\xi\right\|^2 \widehat{u}(t, \xi)$.
c. En déduire que $\dfrac{\partial \widehat{u}}{\partial t}(t, \xi) = -c \left\|\xi\right\|^2 \widehat{u}(t, \xi)$.
d. En déduire que

$$\widehat{u}(t, \xi) = \widehat{\varphi}(\xi) e^{-ct\|\xi\|^2}.$$

e. En déduire que quel que soit $t > 0$ la fonction $u(t, \cdot)$ est la convolée spatiale suivante :

$$(S) \quad u(t, x) = \left(\mathscr{N}(t, \cdot) * \varphi\right)(x), \text{ avec } \mathscr{N}(t, x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\|x\|^2/(4t)}.$$

f. Si φ est positive et non identiquement nulle, la fonction u est-elle à support compact comme supposé ? Conclure !

Soit maintenant $\varphi \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)$.
g. Montrer que la formule (S) définit une solution de l'équation de la chaleur de classe C^∞, sur $\mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}^n$. La fonction u est-elle définie sur $\mathbb{R}_*^- \times \mathbb{R}^n$?
h. Montrer que $u(t, \cdot)$ converge vers φ dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)$ quand t tend vers 0.

(L'unicité de la solution u lorsque $\varphi \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)$ ne résulte pas de ce qui précède et sa démonstration utilise la Théorie des Distributions.)

Pour tout $t > 0$ on note $e^{t\Delta} : \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ l'opérateur $\varphi \mapsto u(t, \cdot) = \mathscr{N}(t, \cdot) * \varphi$.
i. Montrer que $e^{t\Delta}$ définit un opérateur continu $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)$.
j. Montrer que, si φ est de classe C^∞ à support compact sur $\mathbb{R}^n$, $\left\|e^{t\Delta}\varphi\right\|_{\mathrm{L}^2} \leq \left\|\varphi\right\|_{\mathrm{L}^2}$ et en déduire que l'opérateur $e^{t\Delta}$ se prolonge de façon unique en un endomorphisme continu $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$.
k. Montrer, quelle que soit la fonction $\varphi \in \mathrm{L}^2$, que la fonction $e^{t\Delta}\varphi$ satisfait l'équation de la chaleur sur $\mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}^n$ et que $u(t, \cdot)$ converge vers φ dans L^2 quand t tend vers 0.

I. (Question subsidiaire) Interpréter $\mathscr{N}$ comme une solution de l'équation de la chaleur pour une certaine condition initiale φ à déterminer parmi les mesures positives sur $\mathbb{R}^n$.

Correction.

a. On veut définir la fonction $\widehat{u}$ par la formule

$$\widehat{u}(t,\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} u(t,x)e^{-i2\pi\, x\cdot\xi}\, dx.$$

Quels que soient $t > 0$ et $\xi \in \mathbb{R}^n$, la fonction $x \mapsto u(t,x)e^{-i2\pi\, x\cdot\xi}$ est continue, donc borélienne ; de plus, elle est continue et à support compact, donc intégrable. Donc l'intégrale précédente existe. Comme u est de classe C^∞, pour les mêmes raisons les fonctions Δu et $\partial u/\partial t$ sont intégrables et leur transformée de Fourier existe.

b. De même, la transformée de Fourier de $\partial^2 u/\partial x_1^2$ existe et le théorème de Fubini montre que l'on a

$$\widehat{\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}}(t,\xi) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(t,x)e^{-i2\pi\, x\cdot\xi}\, dx_1 \right) dx_2 \otimes \ldots \otimes dx_n.$$

En tenant compte du fait que u est à support compact, deux intégrations par parties montrent alors que l'on a

$$\widehat{\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}}(t,\xi) = -4\pi^2\xi_1^2 \int_{\mathbb{R}^n} u(t,x)e^{-i2\pi\, x\cdot\xi}\, dx.$$

En faisant de même pour les autres dérivations partielles, on obtient

$$\widehat{\Delta u}(t,\xi) = -4\pi^2 \left(\sum_{1\le j\le n} \xi_j^2 \right) \widehat{u}(t,\xi) = -4\pi^2 \left\|\xi\right\|^2 \widehat{u}(t,\xi).$$

c. Le théorème de dérivation sous le signe somme montre que

$$\widehat{\frac{\partial u}{\partial t}} = \frac{\partial \widehat{u}}{\partial t}.$$

Or le membre de gauche est égal à $\widehat{\Delta u}$. Donc

$$\frac{\partial \widehat{u}}{\partial t} = -4\pi^2 \left\|\xi\right\|^2 \widehat{u}.$$

d. D'après l'équation différentielle précédente, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$ il existe un réel $k(\xi)$ tel que

$$\widehat{u}(t,\xi) = k(\xi)\, e^{-4\pi^2\|\xi\|^2 t}.$$

Or $\widehat{u}$ est continue à droite en $t = 0$, donc, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$, d'après le théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre on a

$$\widehat{u}(t,\xi) \to_{t\to 0^+} k(\xi) = \widehat{\varphi}(\xi).$$

Donc

$$\widehat{u}(t,\xi) = \widehat{\varphi}(\xi)e^{-4\pi^2\|\xi\|^2 t}.$$

e. Posons $v(t,x) = \left(\mathscr{N}(t,\cdot) * \varphi\right)(x)$. Comme la transformation de Fourier transforme un produit en un produit de convolution on a

$$\widehat{v}(t,\xi) = \widehat{\mathscr{N}}(t,\xi)\widehat{\varphi}(\xi).$$

Or un calcul classique montre que

$$\widehat{\mathscr{N}}(t,\xi) = e^{-4\pi^2 t\|\xi\|^2}.$$

Donc

$$\widehat{v}(t,\xi) = \widehat{\varphi}(\xi)e^{-4\pi^2 t\|\xi\|^2} = \widehat{u}(t,\xi).$$

Par injectivité de la transformation de Fourier on voit que $u = v$.

f. Pour tout $t > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{N}(t, x-y)\varphi(y)\, dy,$$

donc $u(t,x)$ est strictement positive. Physiquement, c'est un phénomène remarquable que la température soit > 0 dans tout l'espace après un intervalle de temps $t > 0$ arbitrairement petit. C'est une différence importante des solutions de l'équation de la chaleur par rapport aux solutions de l'équation des ondes ; on dit que la chaleur *diffuse*, tandis que les ondes *se propagent.*

En particulier, u n'est pas à support compact, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse faite au début du problème. Mais tout n'est pas perdu !... parce que la formule trouvée (S) a une portée plus générale, qui va être décrite en partie dans les questions qui suivent.

g. On a

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{N}(t, x-y)\varphi(y)\, dy,$$

où $\mathscr{N}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}^n$ et où φ est dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Le théorème de dérivation sous le signe d'intégration montre par récurrence que u est de classe C^∞. En effet, à chaque étape l'intégrande est le produit de $\mathscr{N}$ par φ et par une fraction rationnelle n'ayant de pôle qu'en $t = 0$; or un telle fonction est dominée (uniformément sur tout compact) par une fonction indépendante de t et de x et intégrable par rapport à y et est dérivable par rapport à t et à x.

Ce dernier théorème montre du même coup que l'on a

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \Delta u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\partial \mathscr{N}}{\partial t}(t, x-y) - \Delta \mathscr{N}(t, x-y) \right) \varphi(y)\, dy.$$

Mais un calcul direct montre que $\mathscr{N}$ est solution de l'équation de la chaleur, et donc que le terme entre parenthèses dans l'intégrale s'annule. Donc u elle-même est solution de l'équation de la chaleur sur $\mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}^n$.

Quant aux temps négatifs, on peut d'abord remarquer que la formule donnant $\mathscr{N}$ contient $\sqrt{t}$, donc n'est plus uniquement définie si $t < 0$. On peut cependant choisir une détermination de la racine. Mais alors la fonction $\mathscr{N}$ tend vers l'infini quand t tend vers 0, et n'est pas intégrable quand t est négatif. Donc le produit de convolution dans la formule donnant u n'est pas défini, en général, pour $t < 0$.

h. Comme le produit de convolution est commutatif et comme

$$\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|y\|^2/(4t)}\, dy = 1$$

on a

$$\begin{aligned}
\|u(t,\cdot) - \varphi\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)} &= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \left\| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|y\|^2/(4t)} \left(\varphi(\cdot - y) - \varphi\right)\, dy \right\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|y\|^2/(4t)} |\varphi(x-y) - \varphi(x)|\, dx\, dy \\
&\leq \frac{1}{(4\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|z\|^2/2} \left\| \varphi(\cdot - \sqrt{t}z) - \varphi(\cdot) \right\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)} dz.
\end{aligned}$$

La continuité des translations dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)$ montre que pour tout $z \in \mathbb{R}^n$ on a

$$\lim_{t \to 0} \left\| \varphi(\cdot - \sqrt{t}z) - \varphi(\cdot) \right\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)} = 0.$$

L'inégalité

$$\left\| \varphi(\cdot - \sqrt{t}z) - \varphi \right\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)} \leq 2\, \|\varphi\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)}$$

permet donc d'appliquer le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{t \to 0} \|u(t,\cdot) - \varphi\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)} = 0.$$

i. Le théorème de Fubini montre que quelle que soit la fonction $\varphi \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)$ on a $\left\|e^{t\Delta}\varphi\right\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|\varphi\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)}$.

j. Comme la transformation de Fourier est une isométrie de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$,

$$\left\|e^{t\Delta}\varphi\right\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)} = \left\|\widehat{e^{t\Delta}\varphi}\right\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)} = \left\|\widehat{\varphi}(\cdot)e^{-4\pi^2 t\|\cdot\|^2}\right\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Donc

$$\left\|e^{t\Delta}\varphi\right\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)} \leq \left\|e^{-4\pi^2 t\|\cdot\|^2}\right\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^n)} \|\widehat{\varphi}\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)} = \|\widehat{\varphi}\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)} = \|\varphi\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Ceci montre que l'opérateur $e^{t\Delta}$ se prolonge en un opérateur continu $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$. Comme l'espace vectoriel des fonctions de classe C^∞ à support compact dans $\mathbb{R}^n$ est dense dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$, un tel prolongement est unique.

k. Par continuité de la transformation de Fourier sur $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$, quelle que soit $\varphi \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$ on a

$$\widehat{e^{t\Delta}\varphi}(t,\xi) = \widehat{\varphi}(\xi)e^{-4\pi^2 t\|\xi\|^2}.$$

Or la fonction $e^{-t\|\cdot\|^2}$ appartient à $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$. Donc la fonction $\widehat{e^{t\Delta}\varphi}(t,\cdot)$ est dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)$, et la formule d'inversion de Fourier s'applique :

$$e^{t\Delta}\varphi(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}(\xi)e^{-4\pi^2 t\|\xi\|^2} e^{i\,x\cdot\xi}\, d\xi.$$

Par application du théorème de dérivation sous le signe d'intégration, on vérifie directement que la fonction $u : (t,x) \mapsto e^{t\Delta}\varphi(t,x)$ est de classe C^∞ et satisfait l'équation de la chaleur. De plus, le théorème de convergence dominée montre comme précédemment que l'on a

$$\|u(t,\cdot) - \varphi\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)} \to_{t\to 0^+} 0.$$

l. La mesure de Dirac δ_0 est un élément neutre de la convolution, donc si $\varphi = \delta_0$ la formule donne $u = \mathscr{N}$. Autrement dit, la fonction $\mathscr{N}$, qui fournit la solution générale par convolution avec la condition initiale φ, peut elle-même être obtenue en remplaçant la condition initiale par la mesure δ_0. On la qualifie de *solution fondamentale*, et, dans le cas de l'équation de la chaleur, de *noyau de la chaleur*. Le noyau de la chaleur peut aussi être vu comme la loi d'un mouvement brownien, ce qui établit un lien fondamental avec la théorie des Probabilités.

8. Équivalent d'une intégrale de Fresnel. Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ nulle en dehors d'un intervalle $[-A, A]$. Pour tout nombre complexe $t = t_1 + it_2$ de partie imaginaire $\operatorname{Im} t = t_2$ strictement positive, soit $f_t : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction complexe telle que

$$f_t(x) = e^{itx^2} = e^{-t_2x^2 + it_1x^2}.$$

On veut établir un équivalent de l'intégrale

$$I_t = \int_{\mathbb{R}} e^{itx^2}\phi(x)\,dx$$

quand $\operatorname{Re} t = t_1$ tend vers $+\infty$.

a. Montrer que la transformée de Fourier $\widehat{f_t}$ de la fonction $f_t : x \mapsto e^{itx^2}$ existe et est dérivable sur $\mathbb{R}$.

b. Déterminer en faisant une intégration par parties le nombre complexe a tel que

$$\widehat{f_t}'(u) + a\frac{u}{t}\widehat{f_t}(u) = 0$$

et en déduire l'expression de $\widehat{f_t}$ à une constante multiplicative près.

c. Déterminer cette constante en calculant $\widehat{f_t}(0)$ (on pourra calculer le carré de ce nombre, utiliser le théorème de Fubini puis passer en coordonnées polaires).

On admettra que $\hat{\phi}(u)$ et $u\hat{\phi}(u)$ sont dans $L^1(du)$, et que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\phi(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{\phi}(u)\, e^{i2\pi ux}\, du.$$

d. Calculer la dérivée de ϕ en fonction de $\hat{\phi}$.

On rappelle que l'on a

$$e^z = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{z^n}{n!}$$

pour tout nombre complexe z.

e. Montrer que

$$I_t = \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{i\pi/4} \left(\phi(0) - \frac{\pi}{t}\phi'(0) + O\left(\frac{1}{t^2}\right)\right).$$

Correction.

a. Si elle existe, la transformée de Fourier de $f_t : x \mapsto e^{itx^2}$ est la fonction

$$\widehat{f_t} : u \in \mathbb{R} \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{itx^2} e^{i2\pi ux}\, dx.$$

Posons $h_t(x,u) = e^{itx^2} e^{i2\pi ux}$. Pour tout $u \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto h_t(x,u)$ est continue donc borélienne.

De plus on a $|e^{itx^2} e^{i2\pi ux}| = e^{-t_2 x^2}$, avec par hypothèse $t_2 > 0$; donc $x \mapsto e^{itx^2} e^{i2\pi ux}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et $\widehat{f_t}$ existe.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $u \in \mathbb{R} \mapsto h_t(x,u)$ est dérivable et dominée par une fonction intégrable indépendante de u (voir la majoration ci-dessus) ; sa dérivée elle-même vérifie l'estimation

$$\left|\frac{\partial h_t}{\partial u}(x,u)\right| = \left|i2\pi x\, e^{itx^2}\, e^{i2\pi ux}\right| = \left|i2\pi x e^{-t_2x^2}\right|,$$

où le membre de droite est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$. Donc $\widehat{f_t}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée

$$\widehat{f_t}'(u) = i2\pi \int_{\mathbb{R}} x\, e^{itx^2}\, e^{i2\pi ux}\, dx.$$

b. Une intégration par parties montre qu'on a

$$\widehat{f_t}'(u) = -i2\pi^2 \frac{u}{t} \int_{\mathbb{R}} e^{itx^2}\, e^{i2\pi ux}\, dx = -a\frac{u}{t}\widehat{f_t}'(u), \quad a = 2\pi^2 i.$$

Donc il existe un nombre complexe b tel que

$$\widehat{f_t}(u) = be^{-i2\pi^2 u/t}.$$

c. Ce nombre vaut
$$b = \widehat{f}_t(0) = \int_{\mathbf{R}} e^{itx^2}\, dx,$$
donc avec l'astuce classique suggérée dans l'énoncé on voit que
$$b^2 = \int_{[0,2\pi]} \int_0^\infty e^{itr^2}\, r\, dr\, d\theta = \frac{i\pi}{t}.$$
Donc
$$b = \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{i\pi/4}\ .$$
L'indétermination sur la racine carré du nombre complexe t se lève en remarquant que b dépend continûment de t et que quand t est imaginaire pur on a $b > 0$; donc si $t = \tau e^{i\alpha}$ avec $\alpha \in]0, \pi[$ on a
$$b = \sqrt{\frac{\pi}{\tau}} e^{i(\pi/4 - \tau/2)}.$$
Finalement,
$$\widehat{f}_t(u) = \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{i\pi/4} e^{-i2\pi^2 u/t}.$$
d. D'après les hypothèses, ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée vaut
$$\phi'(x) = i2\pi \int_{\mathbb{R}} u\hat{\phi}(u) e^{i2\pi x u}\, du.$$
e. Comme la transformation de Fourier est un isomorphisme d'espaces de Hilbert $L^2(dx) \to L^2(du)$, et comme à la fois $x \mapsto e^{itx^2}$ et $x \mapsto \phi(x)$ sont dans $L^2(dx)$, on a
$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} e^{itx^2}\, \phi(x)\, dx &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}_t(u) \hat{\phi}(u)\, du \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{i\pi/4} \int_{\mathbb{R}} \left(1 - i2\pi^2 \frac{u}{t} + O\left(\frac{1}{t^2}\right)\right) \hat{\phi}(u)\, du \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{i\pi/4} \left(\int_{\mathbb{R}} \hat{\phi}(u)\, du - \frac{i2\pi^2}{t} \int_{\mathbb{R}} u\hat{\phi}(u)\, du + O\left(\frac{1}{t^2}\right)\right) \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{i\pi/4} \left(\phi(0) - \frac{\pi}{t}\phi'(0) + O\left(\frac{1}{t^2}\right)\right).
\end{aligned}$$

9. Rotations irrationnelles et séries de Fourier. Considérons l'intervalle $E = [0, 1[$ muni de la tribu borélienne $\mathscr{B} = \mathscr{B}(E)$ et de la mesure de Lebesgue λ, et f l'application $x \mapsto x + \alpha \pmod 1$ de E dans lui-même, où α est un nombre réel.

Soit $\varphi : E \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne. Cette dernière est *presque f-invariante* si λ-presque partout on a $\varphi \circ f = \varphi$.

a. Donner un exemple de fonction mesurable f-invariante non constante avec $\alpha = 1/2$.

b. Calculer les coefficients de Fourier de $\varphi \circ f$ en fonction de ceux de φ.

c. Montrer que si α est irrationnel et si la fonction φ est f-invariante, φ est constante presque partout (c'est-à-dire que φ prend une valeur réelle fixée sauf sur un borélien négligeable). L'application f est alors qualifiée d'*ergodique*.

Une partie $A \in \mathscr{E}$ est *presque f-invariante* si sa fonction indicatrice l'est.

d. Montrer que si α est irrationnel, les seules parties presque f-invariantes sont négligeables ou de complémentaire négligeable.
e. Interpréter succintement cette dernière propriété.

Correction.
a. Soit φ une fonction mesurable quelconque définie sur $[0,1/2[$. On peut alors prolonger φ en une fonction définie sur E et f-invariante, avec $\alpha = 1/2$, en posant, pour tout $x \in [1/2, 1[$, $\varphi(x) = \varphi(x - 1/2)$.
b. Notons $\hat{\varphi}_n$ et $\widehat{\varphi \circ f}_n$, $n \in \mathbb{Z}$, les coefficients de Fourier de φ et de $\varphi \circ f$. On a

$$\widehat{\varphi \circ f}_n = \int_0^1 \varphi(x+\alpha)e^{-i2\pi nx}\,dx = \int_0^1 \varphi(x)e^{-i2\pi n(x-\alpha)}\,dx = \hat{\varphi}(n)e^{i2\pi n\alpha}.$$

c. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\left(1 - e^{i2\pi n\alpha}\right)\hat{\varphi}_n = 0.$$

Si α est irrationnel, le facteur entre parenthèses ne s'annule que pour $n = 0$. Donc, pour tout entier relatif non nul n, $\varphi_n = 0$. Donc, d'après le théorème d'injectivité appliqué à $\varphi - \hat{\varphi}_0$, λ-presque partout on a $\varphi - \hat{\varphi}_0 = 0$. Donc φ est constante sur E.
d. Si A est presque partout invariante, la fonction $\mathbb{1}_A$ est presque f-invariantes : $\mathbb{1}_A \circ f = \mathbb{1}_A$ presque partout. (Comme $\mathbb{1}_A \circ f = \mathbb{1}_{f^{-1}(A)}$, ceci signifie que, à un ensemble négligeable près, $f^{-1}(A) = A$).

Si de plus α est irrationnel, $\mathbb{1}_A$ est donc constante presque partout. Donc A est de mesure égale à 0 ou à 1.
e. Si A est presque f-invariante, $f^{-1}(A) = A$ presque partout. Autrement dit, à un ensemble négligeable près, les seuls points qui arrivent dans A sont les points de A eux-mêmes, et tous ces points. Donc, f induit une application de A dans lui-même, par simple restriction.

Si f est ergodique, les seules parties A presque invariantes sont négligeables ou de complémentaire négligeable. Donc l'ergodicité est une propriété d'indécomposabilité dynamique de f relativement à μ.

10. Théorème central limite. Soient $(E, \mathscr{E}, \mu)$ un espace probabilisé et $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions réelles de $L^2(\mu)$.
a. Pourquoi les fonctions f_n sont-elles intégrables ? (On pourra utiliser l'inégalité $|x| \leq 1 + x^2$ sur $\mathbb{R}$).

On supposera que pour tout $n \geq 1$, pour tout pavé borélien $A_1 \times ... \times A_n$ de $\mathbb{R}^n$ on a

$$\mu\left(\{x \in E,\ (f_1(x), ..., f_n(x)) \in A_1 \times ... \times A_n\}\right)$$
$$= \mu\left(\{x_1 \in E,\ f_1(x_1) \in A_1\}\right) ... \mu\left(\{x_n \in E,\ f_n(x_n) \in A_n\}\right)\ ;$$

on dit que les fonctions f_n sont (mutuellement) *indépendantes* ; voir l'Exercice sur l'indépendance dans le chapitre sur les produits de mesures pour une justification de cette définition.
b. Montrer que pour tout $n \geq 1$ la mesure de $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}(\mathbb{R}^n))$, image de μ par l'application $(f_1, ..., f_n) : E \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto (f_1(x), ..., f_2(x))$, égale le produit tensoriel des images de μ par les fonctions f_n :

$$(f_1, ..., f_n)_*\mu = (f_{1*}\mu) \otimes ... \otimes (f_{n*}\mu),$$

c. Si $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction mesurable telle que $h \circ (f_1, ..., f_n)$ est μ-intégrable, montrer l'égalité :

$$\int_E h(f_1(x), ..., f_n(x))\, d\mu(x) = \int_{E^n} h(f_1(x_1), ..., f_n(x_n))\, d\mu^{\otimes n}(x_1, ..., x_n).$$

Pour tout $n \geq 1$, considérons la fonction S_n définie par

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{n}} (f_1 + ... + f_n),$$

et notons σ_n la mesure image de μ par S_n.

d. Justifier que la transformée de Fourier $\hat{\sigma}_n$ de σ_n est bien définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est continue.

On supposera de plus que pour tout $n \geq 1$ l'image de μ par f_n est une mesure ν indépendante de n (on dit que les fonctions f_n sont *identiquement distribuées*).

e. En utilisant la question (c), montrer que

$$\hat{\sigma}_n(u) = \left(\hat{\nu} \left(\frac{u}{\sqrt{n}} \right) \right)^n,$$

où $\hat{\nu}$ est la transformée de Fourier de ν.

f. Montrer que $\hat{\nu}$ est de classe C^2.

On supposera de plus que pour tout entier $n \geq 1$ l'intégrale de f_n est nulle et l'intégrale de ${f_n}^2$ égale 1.

g. Calculer le développement limité de $\hat{\nu}$ à l'ordre 2 en 0.

h. Montrer que quand n tend vers $+\infty$ la suite $(\hat{\sigma}_n)_{n \geq 1}$ tend simplement vers la fonction ζ donnée par

$$\zeta(u) = e^{-2\pi^2 u^2}.$$

On *admettra* qu'alors la suite des mesures σ_n *tend faiblement* vers la mesure de densité

$$\sigma : y \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi uy} \zeta(u)\, du$$

par rapport à la mesure de Lebesgue, c'est-à-dire que pour toute fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et bornée on a

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(y)\, d\sigma_n(y) \to \int_{\mathbb{R}} \varphi(y)\, \sigma(y)\, dy.$$

i. Montrer que σ est une fonction dérivable et écrire l'expression de σ'. Exprimer σ' en fonction de σ en faisant une intégration par partie, puis en déduire l'expression de σ à une constante multiplicative près. Déterminer cette constante en examinant $\sigma(0)$.

j. Tracer le graphe de σ. Justifier rapidement de l'intérêt du résultat démontré, dans la situation où une mesure expérimentale est perturbée par un grand nombre de fluctuations aléatoires.

Correction.

a. Pour tout $y \in \mathbb{R}$ on a $|y| \leq 1 + y^2$, donc

$$\int_E |f_n|\, d\mu \leq \int_E (1 + f_n^2)\, d\mu.$$

Or par hypothèse μ est une probabilité, donc $\int_E d\mu = 1$, et $f_n \in L^2(\mu)$, donc $\int_E {f_n}^2\, d\mu < \infty$. Donc $\int_E |f_n|\, d\mu < \infty$, c'est-à-dire que f_n est intégrable.

b. Pour tout pavé borélien $(A_1, ..., A_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on a

$$\begin{aligned} ((f_1, ..., f_n)_*\mu)(A_1 \times ... \times A_n) &= \mu\left((f_1, ..., f_n)^{-1}(A_1 \times ... \times A_n)\right) \quad \text{(par définition)} \\ &= \mu\left(f_1^{-1}(A_1)\right) ... \mu\left(f_n^{-1}(A_n)\right) \quad \text{(indépendance)} \\ &= (f_{1*}\mu)(A_1) ... (f_{n*}\mu)(A_n) \quad \text{(par définition).} \end{aligned}$$

Or cette propriété caractérise la mesure produit $(f_{1*}\mu) \otimes ... \otimes (f_{n*}\mu)$. Donc on a l'égalité demandée.

c. Dans le cas $n = 2$ on a :

$$\int_E h(f_1(x), f_2(x))\, d\mu(x)$$

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathbb{R}^2} h(y_1, y_2)\, d((f_1, f_2)_*\mu)(y_1, y_2) \quad \text{(intégration par rapport à la mesure image)} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} h(y_1, y_2)\, d((f_{1*}\mu) \otimes (f_{2*}\mu))(y_1, y_2) \quad \text{(d'après la question précédente)} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} h(y_1, y_2)\, d(f_{1*}\mu)(y_1) \right) d(f_{2*}\mu)(y_2) \quad \text{(théorème de Fubini)} \\ &= \int_E \left(\int_E h(f_1(x_1), f_2(x_2))\, d\mu(x_1) \right) d\mu(x_2) \\ &\qquad \text{(intégration par rapport aux mesures images)} \\ &= \int_{E^2} h(f_1(x_1), f_2(x_2))\, d\mu^{\otimes 2}(x_1, x_2) \quad \text{(théorème de Fubini).} \end{aligned}$$

Donc, si f_1 et f_2 sont deux fonctions indépendantes, l'intégrale de n'importe quelle fonction $h(f_1, f_2)$ ne dépend pas du fait que l'on fait varier les arguments de f_1 et de f_2 de façon simultanée ou découplée.

La formule générale pour n quelconque se déduit ensuite du cas $n = 2$ par une récurrence facile, qui utilise l'associativité du produit tensoriel.

d. Comme les fonctions f_n sont mesurables, il en est de même de S_n. Soit $u \in \mathbb{R}$. La fonction complexe $y \mapsto e^{-2i\pi yu}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc borélienne. Donc, en tant que composée de deux fonctions mesurables, la fonction complexe $x \mapsto e^{-2i\pi S_n(x)u}$ est mesurable.

De plus,

$$\int_E |e^{-2i\pi S_n(x)u}|\, d\mu(x) \leq \int_E d\mu = 1.$$

Donc, d'après le rappel du début de l'énoncé, la fonction $y \mapsto e^{-2i\pi yu}$ est σ_n-intégrable. Donc la fonction $\hat{\sigma}_n$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.

Par ailleurs, pour tout $y \in \mathbb{R}$ la fonction $u \mapsto e^{-2i\pi yu}$ est continue et dominée, en module, par la fonction constante égale à 1, qui est elle-même intégrable. Donc, $\hat{\sigma}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

e. La transformée de Fourier de σ_n est donnée par :

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}_n(u) &= \int_{\mathbb{R}} \exp(-2i\pi ux)\, d\sigma_n(x) \\
&= \int_E \exp\left(-2i\pi \frac{u}{\sqrt{n}}(f_1(x)+\ldots+f_n(x))\right) d\mu(x) \\
&= \int_{E^n} \exp\left(-2i\pi \frac{u}{\sqrt{n}}(f_1(x_1)+\ldots+f_n(x_n))\right) d\mu^{\otimes n}(x_1,\ldots,x_n) \quad \text{(question (c))} \\
&= \left(\int_E \exp\left(-2i\pi \frac{u}{\sqrt{n}} f_1(x_1)\right) d\mu(x_1)\right) \ldots \left(\int_E \exp\left(-2i\pi \frac{u}{\sqrt{n}} f_n(x_n)\right) d\mu(x_n)\right) \\
&\qquad \text{(théorème de Fubini)} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-2i\pi \frac{u}{\sqrt{n}} y\right) d\nu(y)\right)^n \quad \text{(distribution identique)} \\
&= \hat{\nu}\left(u/\sqrt{n}\right)^n
\end{aligned}$$

(ce qui prouve au passage que la fonction $\hat{\nu}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, ce qui peut aussi se voir directement, avec les mêmes arguments que pour $\hat{\sigma}_n$ à la question précédente).

f. On a

$$\hat{\nu}(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi yu}\, d\nu(y) = \int_E e^{-2i\pi f_1(x)u} d\mu(x).$$

Pour tout $x \in E$, la fonction complexe $g_x : u \mapsto e^{-2i\pi f_1(x)u}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée, ${g_x}' : u \mapsto -2i\pi f_1(x) e^{-2i\pi f_1(x)u}$, satisfait :

$$|{g_x}'(u)| \leq 2\pi |f_1(x)|,$$

cette dernière fonction étant intégrable d'après la question (a). Donc la fonction $\hat{\nu}$ est dérivable, de dérivée

$$\hat{\nu}'(u) = -2i\pi \int_{\mathbb{R}} y e^{-2i\pi yu}\, d\nu(y).$$

En dérivant une fois de plus on voit que ν est de classe C^2 et que sa dérivée seconde vaut

$$\hat{\nu}''(u) = -4\pi^2 \int_{\mathbb{R}} y^2 e^{-2i\pi yu}\, d\nu(y).$$

g. Le théorème de Taylor-Young s'écrit, à l'ordre deux :

$$\begin{aligned}
\hat{\nu}(u) &= \hat{\nu}(0) + \hat{\nu}'(0)u + \hat{\nu}''(0)\frac{u^2}{2} + o(u^2) \\
&= \int_{\mathbb{R}} d\nu(y) - 2i\pi \int_{\mathbb{R}} y\, d\nu(y)\; u - 4\pi^2 \int_{\mathbb{R}} y^2\, d\nu(y)\; \frac{u^2}{2} + o(u^2) \\
&= 1 - 2\pi^2 u^2 + o(u^2).
\end{aligned}$$

h. D'après les questions (e) et (g), quand u est fixé et n tend vers l'infini, on a

$$\hat{\sigma}_n(u) = \hat{\nu}\left(u/\sqrt{n}\right)^n \to \zeta(u) = e^{-2\pi^2 u^2}.$$

Donc la limite simple de la fonction $\hat{\sigma}_n$ est la gaussienne $\zeta : u \mapsto e^{-2\pi^2 u^2}$.

i. On a

$$\sigma(y) = \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi uy} e^{-2\pi^2 u^2}\, dy$$

(cette formule montre que σ est la transformée de Fourier inverse de ζ). Par les mêmes arguments que précédemment, cette fonction est dérivable, de dérivée

$$\sigma'(y) = 2i\pi \int_{\mathbb{R}} u e^{-2\pi^2 u^2} e^{2i\pi uy}\, du.$$

Une intégration par partie où l'on intègre $ue^{-2\pi^2 u^2}$ et dérive $e^{2i\pi uy}$ montre que $\sigma'(y) = -y\sigma(y)$. Donc il existe une constante C telle que $\sigma(y) = Ce^{-y^2/2}$. Or

$$\sigma(0) = C = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi^2 u^2}\, du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ ;$$

la dernière égalité provient d'un calcul classique.

Finalement, σ_n tend faiblement vers la fonction

$$\sigma : y \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2}.$$

j. Le graphe de la fonction σ est une courbe en cloche appelée *gaussienne*.

Si une expérience est perturbée par un grand nombre de fluctuations aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, le résultat de l'expérience sera bien sûr aléatoire.

Mais le théorème central limite, démontré par les mathématiciens Lindeberg et Lévy, affirme que, si l'on répète l'experience un grand nombre de fois, la probabilité d'obtenir tel ou tel résultat est soumise à une loi gaussienne.