

# Une méthode de type Fast Marching pour l'équation eikonale avec vitesse changeant de signe

Nicolas Forcadel

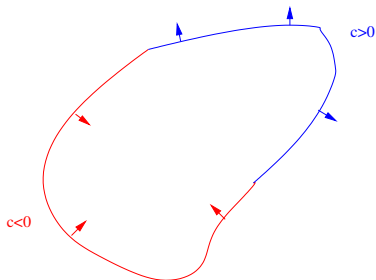
ENPC, CERMICS

Travail en collaboration avec E. Carlini, M. Falcone et R. Monneau

Le 9 Février 2007

## Problème modèle

Une courbe  $\Gamma$  de  $\mathbb{R}^2$  bouge dans le plan avec une vitesse normale pouvant changer de signe.



# Plan

- 1 Motivations
- 2 Rappel sur la méthode Fast Marching
- 3 Méthode Fast Marching Généralisée
- 4 Simulations
- 5 Applications (en cours)
- 6 Perspectives

# Plan

- 1 Motivations
- 2 Rappel sur la méthode Fast Marching
- 3 Méthode Fast Marching Généralisée
- 4 Simulations
- 5 Applications (en cours)
- 6 Perspectives

# Plan

- 1 Motivations
- 2 Rappel sur la méthode Fast Marching
- 3 Méthode Fast Marching Généralisée
- 4 Simulations
- 5 Applications (en cours)
- 6 Perspectives

# Plan

- 1 Motivations
- 2 Rappel sur la méthode Fast Marching
- 3 Méthode Fast Marching Généralisée
- 4 Simulations
- 5 Applications (en cours)
- 6 Perspectives

# Plan

- 1 Motivations
- 2 Rappel sur la méthode Fast Marching
- 3 Méthode Fast Marching Généralisée
- 4 Simulations
- 5 Applications (en cours)
- 6 Perspectives

# Plan

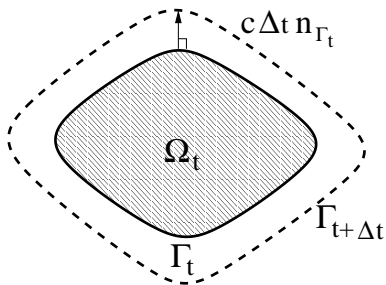
- 1 Motivations
- 2 Rappel sur la méthode Fast Marching
- 3 Méthode Fast Marching Généralisée
- 4 Simulations
- 5 Applications (en cours)
- 6 Perspectives

# Plan

- 1 Motivations
- 2 Rappel sur la méthode Fast Marching
- 3 Méthode Fast Marching Généralisée
- 4 Simulations
- 5 Applications (en cours)
- 6 Perspectives

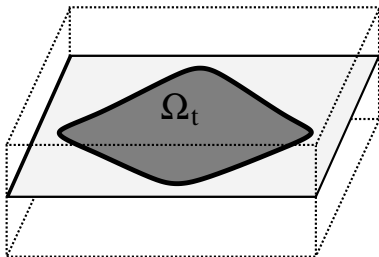


# Dynamique d'une ligne de dislocation



$$\frac{d\Gamma_t}{dt} = c n_{\Gamma_t} \quad \text{avec} \quad c = c(\Gamma_t)$$

## Dynamique d'une ligne de dislocation



$$\rho(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \Omega_t \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

## Equation d'évolution

- On peut alors écrire l'équation d'évolution en fonction de  $\rho$ :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(x, t) = (c_0 \star \rho(\cdot, t))(x) |\nabla \rho(x, t)|$$

où

$$c_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^2), \quad c_0(-x) = c_0(x) \quad \text{and} \quad \int_{\mathbb{R}^2} c_0(x) dx = 0.$$

## Equation d'évolution

- On peut alors écrire l'équation d'évolution en fonction de  $\rho$ :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(x, t) = (c_0 \star \rho(\cdot, t))(x) |\nabla \rho(x, t)|$$

où

$$c_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^2), \quad c_0(-x) = c_0(x) \quad \text{and} \quad \int_{\mathbb{R}^2} c_0(x) dx = 0.$$

## Quelques résultat pour la dynamique des dislocations

- Existence et unicité en temps court : [Alvarez, Hoch, Le Bouar, Monneau], [Forcadel]
- Existence et unicité en temps long : [Alvarez, Cardaliaguet, Monneau], [Barles, Ley]
- Lien dislocations/MCM : [Garroni, Müller], [Da Lio, Forcadel, Monneau], [Forcadel]
- Homogénéisation : [Imbert, Monneau, Rouy], [Imbert, Monneau, Forcadel]

## Quelques résultat pour la dynamique des dislocations

- Existence et unicité en temps court : [Alvarez, Hoch, Le Bouar, Monneau], [Forcadel]
- Existence et unicité en temps long : [Alvarez, Cardaliaguet, Monneau], [Barles, Ley]
- Lien dislocations/MCM : [Garroni, Müller], [Da Lio, Forcadel, Monneau], [Forcadel]
- Homogénéisation : [Imbert, Monneau, Rouy], [Imbert, Monneau, Forcadel]

## Quelques résultat pour la dynamique des dislocations

- Existence et unicité en temps court : [Alvarez, Hoch, Le Bouar, Monneau], [Forcadel]
- Existence et unicité en temps long : [Alvarez, Cardaliaguet, Monneau], [Barles, Ley]
- Lien dislocations/MCM : [Garroni, Müller], [Da Lio, Forcadel, Monneau], [Forcadel]
- Homogénéisation : [Imbert, Monneau, Rouy], [Imbert, Monneau, Forcadel]

## Quelques résultats pour la dynamique des dislocations

- Existence et unicité en temps court : [Alvarez, Hoch, Le Bouar, Monneau], [Forcadel]
- Existence et unicité en temps long : [Alvarez, Cardaliaguet, Monneau], [Barles, Ley]
- Lien dislocations/MCM : [Garroni, Müller], [Da Lio, Forcadel, Monneau], [Forcadel]
- Homogénéisation : [Imbert, Monneau, Rouy], [Imbert, Monneau, Forcadel]

## Analyse numérique?

- Le problème de la résolution numérique a été étudié par Alvarez *et al* pour l'équation level set. Cette méthode pose des problème pour localiser le front!
- Idée: Utiliser une méthode de type Fast Marching (introduite par Sethian en 1996)
- Problème : la vitesse dépend du temps et peut changer de signe.

## Analyse numérique?

- Le problème de la résolution numérique a été étudié par Alvarez *et al* pour l'équation level set. Cette méthode pose des problème pour localiser le front!
- Idée: Utiliser une méthode de type Fast Marching (introduite par Sethian en 1996)
- Problème : la vitesse dépend du temps et peut changer de signe.

# Analyse numérique?

- Le problème de la résolution numérique a été étudié par Alvarez *et al* pour l'équation level set. Cette méthode pose des problème pour localiser le front!
- Idée: Utiliser une méthode de type Fast Marching (introduite par Sethian en 1996)
- Problème : la vitesse dépend du temps et peut changer de signe.

# Plan

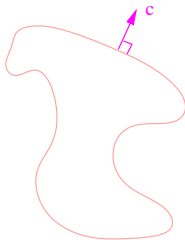
- 1 Motivations
- 2 **Rappel sur la méthode Fast Marching**
- 3 Méthode Fast Marching Généralisée
- 4 Simulations
- 5 Applications (en cours)
- 6 Perspectives

## Lien avec Level sets

- La courbe

$$\Gamma_t = \{x \in \mathbb{R}^2, u(x, t) = 0\}$$

évolue à la vitesse normale  $c$ ,



si la fonction  $u$  vérifie l'EDP

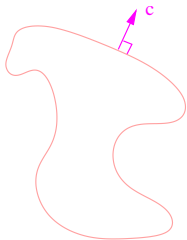
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = c(x) |\nabla u(x, t)|$$

## Lien avec Level sets

- La courbe

$$\Gamma_t = \{x \in \mathbb{R}^2, u(x, t) = 0\}$$

évolue à la vitesse normale  $c$ ,



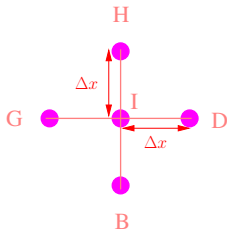
si la fonction  $u$  vérifie l'EDP

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = c(x) |\nabla u(x, t)|$$

## Lien avec Level sets

- Cas  $c = c(x) \geq 0$  et  $u(x, t) = t - T(x)$

$$\Rightarrow |\nabla T(x)| = \frac{1}{c(x)}.$$

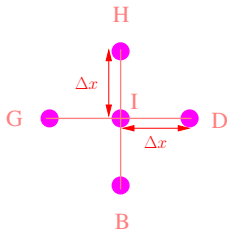


$$+ \max(T_I - T_G, T_I - T_D, 0)^2 + \max(T_I - T_H, T_I - T_B, 0)^2 = \left(\frac{\Delta x}{c_I}\right)^2 \quad (1)$$

## Lien avec Level sets

- Cas  $c = c(x) \geq 0$  et  $u(x, t) = t - T(x)$

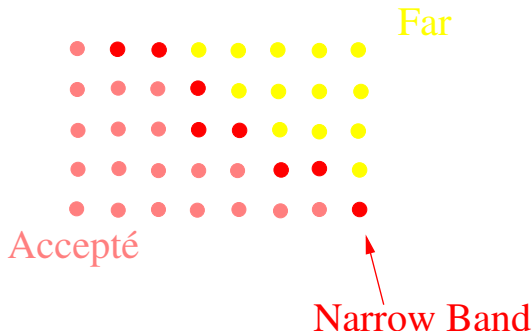
$$\Rightarrow |\nabla T(x)| = \frac{1}{c(x)}.$$



$$+ \begin{matrix} \max(T_I - T_G, T_I - T_D, 0)^2 \\ \max(T_I - T_H, T_I - T_B, 0)^2 \end{matrix} = \left( \frac{\Delta x}{c_I} \right)^2 \quad (1)$$

## Introduction de la Narrow Band

Idée : Résoudre le schéma uniquement prêt du front.



- Calcul de  $T_I$  sur la NB
- Les points  $I$  avec  $T_I$  minimal sont acceptés
- La NB est redéfinie comme le bord de la nouvelle région "Accepté"

# Références

- [Sethian]
- [Vladimirsky] : cas  $c = c(x, t) > 0$
- [Cristiani, Falcone] : Preuve de convergence

# Plan

- 1 Motivations
- 2 Rappel sur la méthode Fast Marching
- 3 Méthode Fast Marching Généralisée**
- 4 Simulations
- 5 Applications (en cours)
- 6 Perspectives

## Dépendance en temps de la vitesse

- Le temps est donné de manière implicite par le schéma!

$$t_n = \min_{I \in NB} T_I$$

- Deux difficultés :

- $t_n$  peut être plus petit que  $t_{n-1}$ .

$$t_n = t_{n-1}$$

- $t_n$  peut être très grand.

⇒ Introduction d'un pas de temps  $\Delta t$

$$\text{si } t_n \geq t_{n-1} + \Delta t \Rightarrow t_n = t_{n-1} + \Delta t$$

## Dépendance en temps de la vitesse

- Le temps est donné de manière implicite par le schéma!

$$t_n = \min_{I \in NB} T_I$$

- Deux difficultés :

- $t_n$  peut être plus petit que  $t_{n-1}$ .

$$t_n := t_{n-1}$$

- $t_n$  peut être très grand.

⇒ Introduction d'un pas de temps  $\Delta t$  :

$$\text{si } t_n \geq t_{n-1} + \Delta t \Rightarrow t_n := t_{n-1} + \Delta t$$

## Dépendance en temps de la vitesse

- Le temps est donné de manière implicite par le schéma!

$$t_n = \min_{I \in NB} T_I$$

- Deux difficultés :
  - $t_n$  peut être plus petit que  $t_{n-1}$ .

$$t_n := t_{n-1}$$

- $t_n$  peut être très grand.

⇒ Introduction d'un pas de temps  $\Delta t$  :

$$\text{si } t_n \geq t_{n-1} + \Delta t \Rightarrow t_n := t_{n-1} + \Delta t$$

## Dépendance en temps de la vitesse

- Le temps est donné de manière implicite par le schéma!

$$t_n = \min_{I \in NB} T_I$$

- Deux difficultés :
  - $t_n$  peut être plus petit que  $t_{n-1}$ .

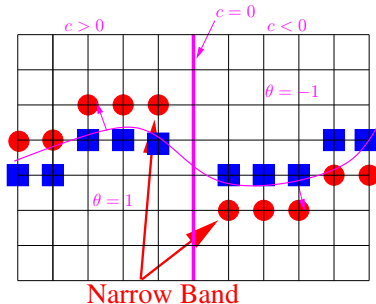
$$t_n := t_{n-1}$$

- $t_n$  peut être très grand.

⇒ Introduction d'un pas de temps  $\Delta t$  :

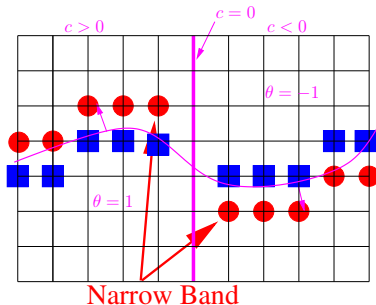
$$\text{si } t_n \geq t_{n-1} + \Delta t \Rightarrow t_n := t_{n-1} + \Delta t$$

## Changement de signe de la vitesse



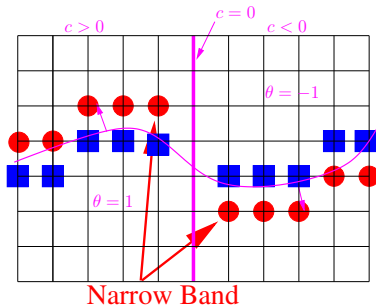
- Introduction d'un champ  $\theta_I^n \in \{-1, 1\}$
- Régularisation de la vitesse en espace
- Double Narrow band
- Connaissance du temps de chaque côté du front

## Changement de signe de la vitesse



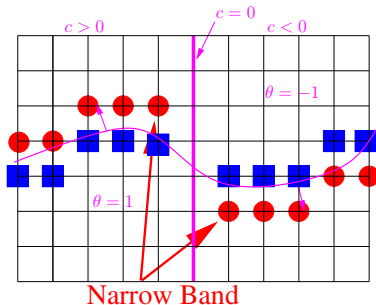
- Introduction d'un champ  $\theta_I^n \in \{-1, 1\}$
- Régularisation de la vitesse en espace
- Double Narrow band
- Connaissance du temps de chaque côté du front

## Changement de signe de la vitesse



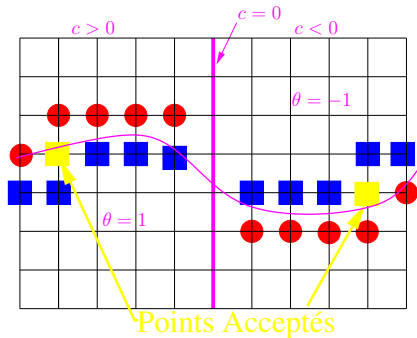
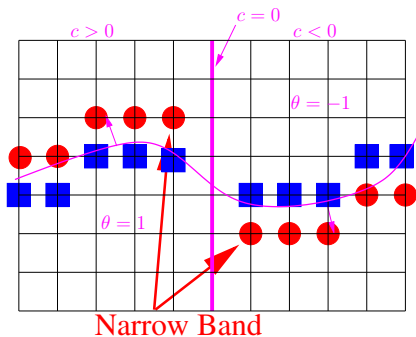
- Introduction d'un champ  $\theta_I^n \in \{-1, 1\}$
- Régularisation de la vitesse en espace
- Double Narrow band
- Connaissance du temps de chaque côté du front

## Changement de signe de la vitesse



- Introduction d'un champ  $\theta_I^n \in \{-1, 1\}$
- Régularisation de la vitesse en espace
- Double Narrow band
- Connaissance du temps de chaque côté du front

# Exemple



## Résultat de convergence

- $\theta^\varepsilon$  : prolongement par continuité de  $\theta_I^n$ , avec  $\varepsilon = (\Delta x, \Delta t)$
- Semi-limites relaxées

$$\bar{\theta}^0(x, t) = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0, y \rightarrow x, s \rightarrow t} \theta^\varepsilon(y, s), \quad \underline{\theta}^0(x, t) = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0, y \rightarrow x, s \rightarrow t} \theta^\varepsilon(y, s).$$

## Résultat de convergence

- $\theta^\varepsilon$  : prolongement par continuité de  $\theta_I^n$ , avec  $\varepsilon = (\Delta x, \Delta t)$
- Semi-limites relaxées

$$\bar{\theta}^0(x, t) = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0, y \rightarrow x, s \rightarrow t} \theta^\varepsilon(y, s), \quad \underline{\theta}^0(x, t) = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0, y \rightarrow x, s \rightarrow t} \theta^\varepsilon(y, s).$$

## Résultat de convergence

### Théorème (Carlini, Falcone, NF, Monneau)

*Sous certaines hypothèses de régularité,  $\bar{\theta}^0$  (resp.  $\underline{\theta}^0$ ) est une sous-solution de viscosité (resp. sur-solution) de*

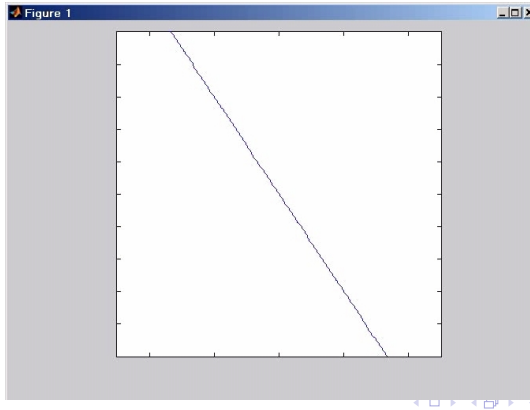
$$\begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial t}(x, t) = c(x, t) |D\theta(x, t)| & \text{dans } \mathbb{R}^2 \times (0, T) \\ \theta(\cdot, 0) = 1_{\Omega_0} - 1_{\Omega_0^c} & \text{sur } \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

# Plan

- 1 Motivations
- 2 Rappel sur la méthode Fast Marching
- 3 Méthode Fast Marching Généralisée
- 4 Simulations**
- 5 Applications (en cours)
- 6 Perspectives

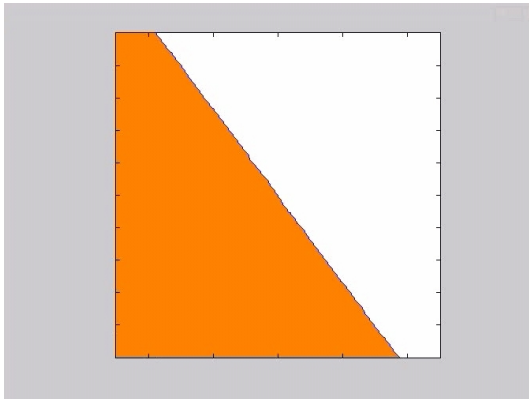
# Une droite

$$c(x, t) = x_1$$

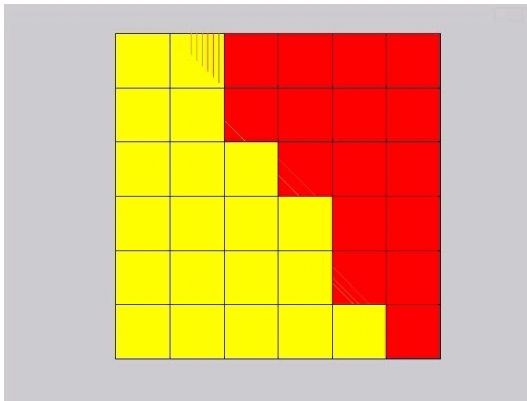


# Une droite

$$c(x, t) = x_1$$

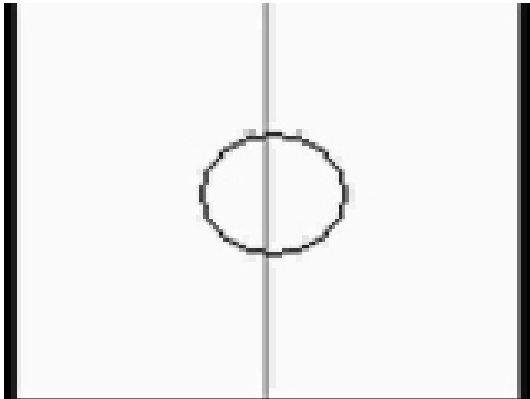


# Une droite



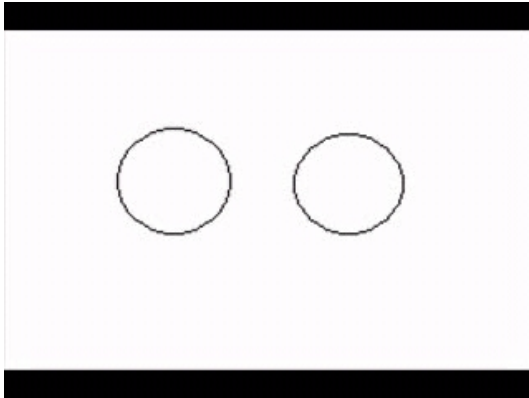
# Un cercle

$$c(x, t) = -x_1$$



## Deux cercles

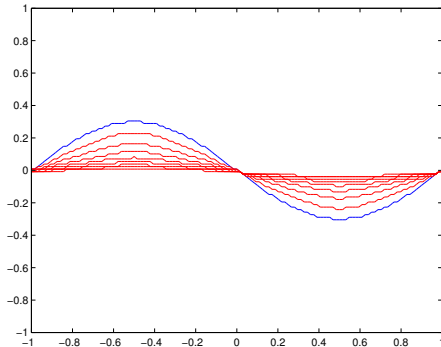
$$c(x, t) = 1 - t$$



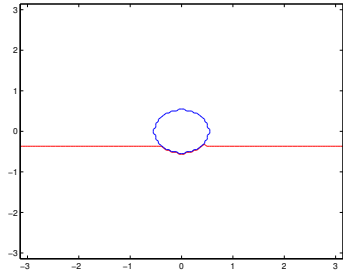
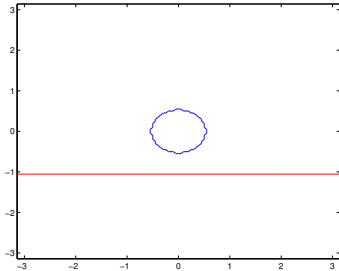
# Plan

- 1 Motivations
- 2 Rappel sur la méthode Fast Marching
- 3 Méthode Fast Marching Généralisée
- 4 Simulations
- 5 Applications (en cours)**
- 6 Perspectives

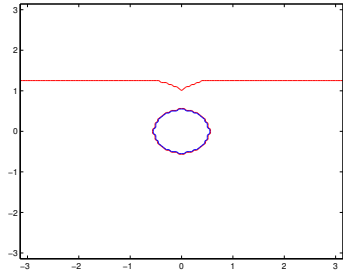
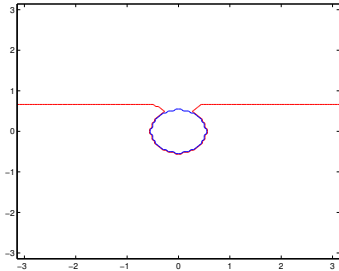
# Dynamique des dislocations: sinusoidale



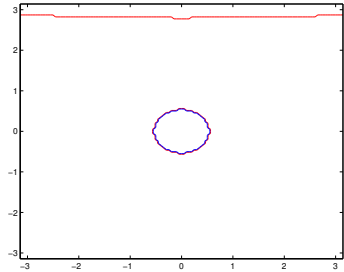
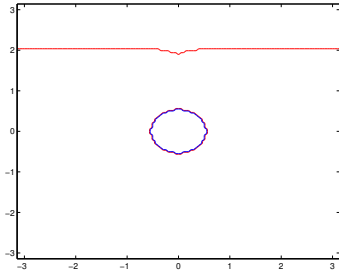
# Dynamique des dislocations: obstacle



# Dynamique des dislocations: obstacle



# Dynamique des dislocations: obstacle



# Segmentations d'image : donnée géophysique

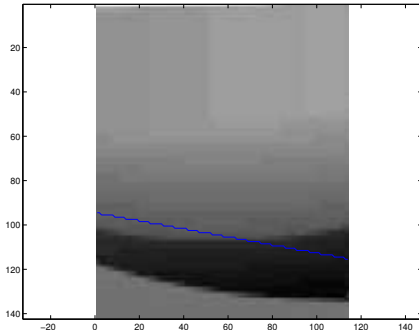


Figure: Condition initiale.

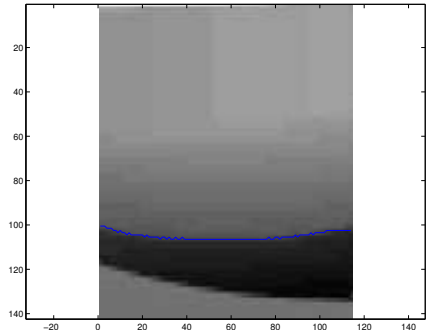


Figure: Résultat final.

## Segmentations d'image : donnée médicale



## Segmentations d'image : donnée médicale

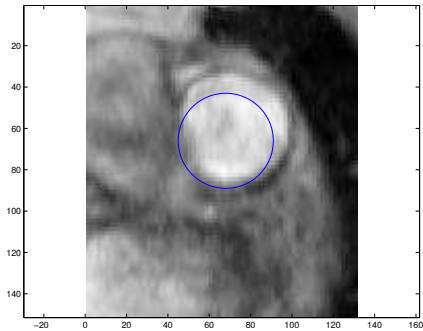


Figure: Condition initiale.

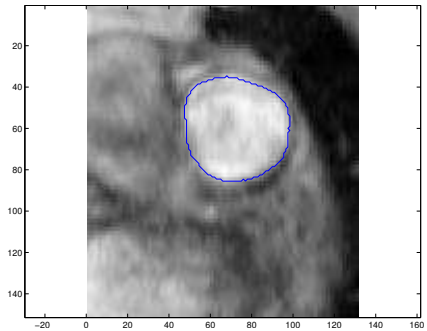


Figure: Résultat final.

# Plan

- 1 Motivations
- 2 Rappel sur la méthode Fast Marching
- 3 Méthode Fast Marching Généralisée
- 4 Simulations
- 5 Applications (en cours)
- 6 Perspectives

# Perspectives

- Preuve de convergence dans le cas dislocation (Projet Galilée)
- Applications à la segmentation d'image (C. Gout, C. Le Guyader)
- Schéma de type FMM pour l'équation de transport (contrat CEA, groupe de travail au CERMICS)
- Maillage non régulier (P. Hoch, Groupe de travail CERMICS)

## Perspectives

- Preuve de convergence dans le cas dislocation (Projet Galilée)
- Applications à la segmentation d'image (C. Gout, C. Le Guyader)
- Schéma de type FMM pour l'équation de transport (contrat CEA, groupe de travail au CERMICS)
- Maillage non régulier (P. Hoch, Groupe de travail CERMICS)

# Perspectives

- Preuve de convergence dans le cas dislocation (Projet Galilée)
- Applications à la segmentation d'image (C. Gout, C. Le Guyader)
- Schéma de type FMM pour l'équation de transport (contrat CEA, groupe de travail au CERMICS)
- Maillage non régulier (P. Hoch, Groupe de travail CERMICS)

## Perspectives

- Preuve de convergence dans le cas dislocation (Projet Galilée)
- Applications à la segmentation d'image (C. Gout, C. Le Guyader)
- Schéma de type FMM pour l'équation de transport (contrat CEA, groupe de travail au CERMICS)
- Maillage non régulier (P. Hoch, Groupe de travail CERMICS)