LSO
Outils Mathématiques pour la finance
Examen - Mardi 12 mars 2019

— Sans document. Sans appareil électronique (calculatrice, téléphone etc)
— L'examen dure 2 heures.
— Recommandation : lisez tout le sujet avant de composer.

Exercise 1

1. On considère le système différentiel de dimension 2 :

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix},$$

et sa condition initiale à la date $t = 0$, (x_0, y_0). Pour chacune des matrices A suivantes, donner les solutions du système et dessiner les portraits de phase

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

2. On considère l'équation différentielle scalaire $y''(t) + k^2 y(t) = 0$, où k est un réel positif. On note (y_0, y_0') la condition initiale de cette équation en $t = 0$.
   a) Mettre cette EDO sous forme d'un système différentiel de dimension 2.
   b) Donner la solution du système en fonction de la condition initiale.

Exercise 2

On considère l'équation différentielle scalaire $y'(t) + by(t)^2 + cy(t) = 0$, où b, c sont trois réels tous non-nuls. On note y_0 la condition initiale en $t = 0$.

1. On considère le changement de variable $z(t) := y(t)^{-1}$. Donner l'équation différentielle satisfaite par $z(t)$.
2. A quelle classe d'équation différentielle appartient l'équation satisfaite par z ? Résoudre l'équation différentielle satisfaite par z.
3. En déduire y.

Exercise 3

Cet exercice est inspiré du modèle de Kermack et Mackendric (1927) pour le démarrage et l'évolution d'une épidémie. On considère qu'une population est divisée en trois catégories, à chaque date t :
– $x(t)$ est le nombre de personnes saines,
– $y(t)$ est le nombre de personnes malades,
– $z(t)$ est le nombre de personnes mortes suites à cette maladie. On fait l'hypothèse que cette épidémie évolue très vite par rapport à l'évolution, plus lente, de la société due aux naissances et autres morts. On propose alors le modèle suivant

$$\begin{aligned} x'(t) &= -\mu x(t)y(t) \\ y'(t) &= \mu x(t)y(t) - \sigma y(t) \\ z'(t) &= \sigma y(t) \end{aligned}$$

où $\mu > 0$ et $\sigma > 0$ sont deux constantes strictement positives . On suppose qu'à la date initiale :

$$x(0) = x_0 > 0, \; y(0) = y_0 \geq 0 \; \text{ et } z(0) = 0 \,.$$

1. Que peut-on dire de l'existence et de l'unicité de la solution (x, y, z) de ce problème ?
2. Déterminez $x'(t) + y'(t) + z'(t)$ et en déduire que $x(t) + y(t) + z(t) = N$ où N est une constante.
3. En utilisant les équations de x' et de z', montrez que : $x(t) = x_0 \exp\left(-\mu z(t)/\sigma\right)$.
4. Montrez que z est solution de l'EDO scalaire de premier ordre

$$z'(t) \quad = \quad \sigma \left(N - z(t) - x_0 \exp\left(-\frac{\mu}{\sigma} z(t) \right) \right) \tag{1}$$

5. Donnez le tableau de variation de la fonction

$$f : \qquad z \in \mathbb{R} \mapsto N - z - x_0 \exp(-\mu z/\sigma)$$

   en distinguant les deux cas $x_0 < \sigma/\mu$ et $x_0 \geq \sigma/\mu$
6. Déduire de la question précédente, que pour $z(t) \geq 0$ il existe un seul point d'équilibre $z^\star \geq 0$ pour l'EDO 1 et que cet équilibre $z^\star$ est stable.
7. Par définition, il y a épidémie si le nombre de malades augmente $y'(t) \geq 0$. Montrez que dans le cas $x_0 < \sigma/\mu$, les fonctions z' et y sont décroissantes (en t) et qu'il n'y pas d'épidémie.

Exercise 4

1. On considère tout d'abord l'équation différentielle

$$v'(t) = -2v(t)^2, \quad v(0) = v_0. \tag{2}$$

   Dessiner la ligne de phase pour cette équation. En déduire la limite de $v(t)$ en $t \to +\infty$ dans le cas où $v_0 \geq 0$.

   On s'intéresse maintenant au système suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t)^3 - 2x(t)y(t)^2 - y(t), & x(0) = x_0 \\ y'(t) = -y(t)^3 + x(t), & y(0) = y_0. \end{cases} \tag{3}$$

2. Soit $(x(\cdot), y(\cdot))$ une solution de (3). On pose $V(t) = x(t)^2 + y(t)^2$. Calculer $V'(t)$ et en déduire une équation différentielle satisfaite par V.
3. Déduire des questions précédentes la limite en $t \to +\infty$ des solutions de (3), puis déterminer les équilibres de (3) et s'ils sont stables.
4. Donner la solution explicite de l'équation (2).
5. Déduire des questions précédentes que si $(x(\cdot), y(\cdot))$ est une solution de (3), alors pour $t \geq \frac{1}{2}$, le point $(x(t), y(t))$ appartient au disque de centre $(0, 0)$ et de rayon 1 (quelle que soit la condition initiale).