LSO
Outils Mathématiques pour la finance
Examen - Mardi 12 mars 2019 : éléments de correction

Attention : il ne s'agit pas d'une correction détaillée, mais simplement des grandes lignes des raisonnements ou calculs à effectuer pour résoudre les questions.

Exercise 1

1. (a) La matrice est diagonale, on a donc des équations séparées pour x et y, plus précisément : $x' = x$ et $y' = 2y$. On sait résoudre ces équations, la solution est

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 e^t \\ y_0 e^{2t} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Portrait de phase : voir figure plus bas. Il s'agit d'une source.
(b) Idem,

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 e^{-t} \\ y_0 e^{t} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Les valeurs propres ont deux signes distincts, l'origine est un point-selle.
(c) On calcule les valeurs propres

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1$$

et les vecteurs propres associés : par exemple

$$W_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } W_{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On sait que la solution générale de l'équation est de la forme

$$X(t) = ue^t W_1 + ve^{-t} W_{-1}, \quad t \in \mathbb{R}$$

il reste à déterminer u et v en prenant $t = 0$. On obtient $u = \frac{x_0+y_0}{2}$, $v = \frac{x_0-y_0}{2}$.
L'origine est encore un point-selle.

2. a) On pose $U = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$, et on vérifie que y est solution de l'équation si et seulement si $U' = AU$, avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k^2 & 0 \end{pmatrix}$.
b) (Attention : cette question n'est plus au programme en 2021).
On trouve :

$$y(t) = y_0 \cos(kt) + \frac{y_0'}{k} \sin(kt), \quad t \in \mathbb{R}.$$

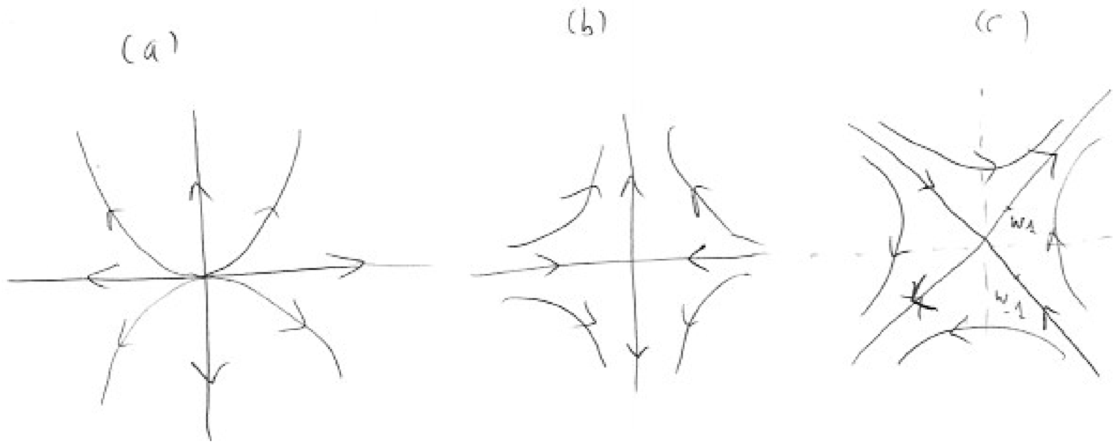

FIGURE 1 – Portraits de phase de l'exercice 1

Exercise 2

1. On a
$$z'(t) = -\frac{y'(t)}{y(t)^2} = b + cz(t).$$
2. Il s'agit d'une équation linéaire non-homogène (à coefficients constants). On trouve :
$$z(t) = (z_0 + \frac{b}{c})e^{ct} - \frac{b}{c}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$
3. On obtient
$$y(t) = \frac{y_0}{e^{ct} + \frac{by_0}{c}(e^{ct} - 1)}$$
(il faut aussi déterminer l'intervalle de définition maximal...).

Exercise 3

1. La fonction $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par
$$F(x, y, z) = (-\mu xy, \mu xy - \sigma y, \sigma y)$$
est C^1, donc par le théorème de Cauchy-Lipschitz, l'équation admet une unique solution maximale.
2. On calcule facilement que $x'(t) + y'(t) + z'(t) = 0$, et donc $x(t) + y(t) + z(t)$ est une constante.
3. On a
$$x'(t) = -\mu x(t)y(t) = -\frac{\mu}{\sigma}z'(t)x(t)$$

en utilisant l'équation de z'. On remarque que c'est une équation de la forme $x'(t) = a(t)x(t)$. En appliquant la formule pour la solution d'une telle équation, on obtient

$$x(t) = x_0 \exp\left(-\frac{\mu}{\sigma}\int_0^t z'(s)ds\right) = x_0 \exp\left(-\mu z(t)/\sigma\right).$$

4. Par la question 2), on a :
$$z'(t) = \sigma(N - x(t) - z(t))$$
et en remplaçant x par la valeur obtenue dans la question précédente on trouve le résultat.
5. On a
$$f'(z) = -1 + \mu x_0/\sigma \exp(-\mu z/\sigma)$$
et on peut en déduire le tableau de variation ci-dessous (où $\bar{z} = -\sigma/\mu \ln(\frac{\sigma}{\mu x_0})$) :

x	$-\infty$		$\bar{z}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\bar{z})$	$\searrow$	$-\infty$

6. On a $f(0) = N - x_0 = y_0 > 0$. Du tableau de variation précédent (en distinguant le raisonnement suivant le signe de $\bar{z} < 0$) on déduit qu'il existe un unique point $z^\star \geq 0$ tel que $f(z^\star) = 0$, et que f est positive sur$[0, z^\star]$ et négative sur $[z^\star, +\infty[$. La ligne de phase est donc la suivante pour $z \geq 0$:

$$0 - - - - - - - - - - > - - - - - - - - - - - z^\star - - - - - - - - - - < - - - - - - - - - - - - - - -$$

et l'équilibre $z^\star$ est stable.
7. D'une part : $z'(t) = \sigma y(t) \geq 0$, donc z est croissante en t. D'autre part, dans le cas $x_0 < \sigma/\mu$, on a $\bar{z}$ <0, et donc f est décroissante sur $[0, +\infty[$.
On en déduit que comme $z'(t) = f(z(t))$, z' est décroissante en t. $y = z'/\sigma$ l'est donc également.

Exercise 4

1. L'équation a un seul équilibre en $v = 0$, et $-2v^2 \leq 0$ pour toute valeur de v. La ligne de phase est donc de la forme
$$- - - - - < - - - - - 0 - - - - - - < - - - - - -$$
2. On a :
$$V'(t) = 2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t)$$
et après un calcul on trouve
$$V'(t) = -2x(t)^4 - 4x(t)^2y(t)^2 - 2y(t)^4 = -2(x(t)^2 + y(t)^2) = -2V(t)^2.$$

3. V est solution de l'équation du 1), et $V(0) \geq 0$, donc d'après la ligne de phase on a

$$\lim_{t\to\infty} x(t)^2 + y(t)^2 = 0,$$

ce qui implique que

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0, \lim_{t\to\infty} y(t) = 0.$$

On vérifie facilement que $(0,0)$ est un équilibre du système, et il est stable ($V' \leq 0$ implique que les solutions se rapprochent de l'origine).
De plus, la limite ci-dessus implique que c'est le seul équilibre : si (x^*, y^*) est un point d'équilibre, la solution du système avec $(x_0, y_0) = (x^*, y^*)$ satisfait $x(t) = x^*, y(t) = y^*$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En comparant avec la limite en $t \to \infty$, on obtient $x^* = y^* = 0$. (Pas besoin de faire de calcul !)

4. On applique la séparation des variables, et après calcul on obtient :

$$v(t) = \frac{v_0}{1 + 2v_0 t}, \qquad t \in I$$

avec intervalle maximal de définition

$$I = \begin{cases}]-\infty, -\frac{1}{v_0}[& \text{si } v_0 < 0, \\ ]-\frac{1}{v_0}, +\infty[& \text{si } v_0 > 0, \\ \mathbb{R} & \text{si } v_0 = 0. \end{cases}$$

5. On remarque que $(x(t), y(t))$ appartient au disque de centre $(0,0)$ et de rayon 1 si et seulement si $V(t) \leq 1$. Or d'après la question précédente, on sait que

$$V(t) = \frac{1}{1/V(0) + 2t} \leq \frac{1}{2t} \leq 1 \text{ si } t \geq \frac{1}{2}.$$