Corrigé du partiel du 31 Mars 2010.

Exercice 1.
1. Sous réserve d'existence

$$M_B(t) = \mathbb{E}[e^{tB}] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk}\ \mathbb{P}(B=k) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk}\ \frac{\Gamma(r+k)}{\Gamma(r)k!} q^r(1-q)^k$$
$$= \left(\frac{q}{1-e^t(1-q)}\right)^r \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(r+k)}{\Gamma(r)k!}(1-e^t(1-q))^r(e^t(1-q))^k = \left(\frac{q}{1-e^t(1-q)}\right)^r$$

$\forall t \in \mathbb{R}$ tel que $0 < e^t(1-q) < 1$, i.e. $\forall t < -\ln(1-q)$ car on reconnait une loi binomiale négative de paramètres r et $1-e^t(1-q)$.
2a. On observe que, pour $0<p<1$ on l'a bien $\mathbb{P}(X_i = k) > 0$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$. De plus

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_i = k) = \frac{1}{-\ln(1-p)} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{p^k}{k}\right) = \frac{1}{\ln(1-p)} \ln(1-p) = 1,$$

vu que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$, pour tout $|x|<1$.
2b. Sous réserve d'existence $M_S(t) = \mathbb{E}[e^{tS}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[e^{t\sum_{i=1}^N X_i}|N]]$. D'ailleurs N est indépendant des X_is, donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\mathbb{E}[e^{t\sum_{i=1}^N X_i}|N=n] = \mathbb{E}[e^{t\sum_{i=1}^n X_i}] = M_{\sum_{i=1}^N X_i}(t) = (M_{X_1}(t))^n.$$

On observe de plus que si $n=0$, $\mathbb{E}[e^{tS}|N=0] = 1$. On peut donc écrire

$$M_S(t) = \mathbb{E}[(M_{X_1}(t))^N] = \mathbb{E}[\exp(N\ln(M_{X_1}(t))] = M_N(\ln(M_{X_1}(t)))$$
$$= \exp(\lambda(e^{\ln(M_{X_1}(t))}-1)) = \exp(\lambda(M_{X_1}(t)-1)),$$

car $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$.
On peut maintenant calculer $M_{X_1}(t)$:

$$M_{X_1}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{tk}\ \mathbb{P}(X_1 = k) = \frac{1}{-\ln(1-p)} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(pe^t)^k}{k}\right) = \frac{\ln(1-pe^t)}{\ln(1-p)}$$

$\forall t \in \mathbb{R}$ tel que $pe^t < 1$, i.e. $\forall t < -\ln p$.

$$\Longrightarrow \qquad M_S(t) = \exp\left(\lambda\left(\frac{\ln(1-pe^t)}{\ln(1-p)} - 1\right)\right).$$

2c. On observe que

$$M_S(t) = \exp\left(\frac{\lambda}{\ln(1-p)}\left((\ln(1-pe^t) - \ln(1-p))\right)\right) = \exp\left(-\frac{\lambda}{\ln(1-p)}\ln\left(\frac{(1-p)}{(1-pe^t)}\right)\right)$$

Si on pose $r = -\frac{\lambda}{\ln(1-p)} > 0$ et $q = 1-p$ on obtient

$$M_S(t) = \exp\left(r\ln\left(\frac{q}{(1-e^t(1-q))}\right)\right) = \left(\frac{q}{1-e^t(1-q)}\right)^r$$

$\forall t < -\ln(1-q)$.
Vu que la fonction génératrice caracterise la loi, on a prouvé que S suit une loi Binomiale négative de paramètres $r = -\frac{\lambda}{\ln(1-p)}$ et $q = 1-p$.

2d.

- prime pure : $\mathbb{E}[S]$
- prime d'assurance : $\pi(S) = (1+\varrho)\ \mathbb{E}[S]$

D'après le cours, $\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[N]\mathbb{E}[X_1]$ (résulat connu sous le nom d'"identité de Wald").
D'autre part $\mathbb{E}[X_1] = \left[\frac{d}{dt}M_{X_1}(t)\right]_{t=0}$.
On a donc tout de suite

$$\mathbb{E}(S) = \frac{-\lambda p}{(1-p)\ln(1-p)} \qquad \text{et} \qquad \pi(S) = (1+\varrho)\mathbb{E}(S) = \frac{-\lambda p(1+\varrho)}{(1-p)\ln(1-p)}$$

Exercice 2.

1. Soit $\tau_1 = T_1$ et pour $n \geq 1$, soit $\tau_n = T_n - T_{n-1}$ le temps d'attente entre les $(n-1)$-ième et n-ième sauts du processus N. On sait que la suite $(\tau_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées selon une loi exponentielle de paramètre λ. En particulier τ_1 est intégrable et $\mathrm{E}\,\tau_1 = 1/\lambda$. La loi forte des grands nombres assure alors que $T_n/n = (1/n)\sum_{i=1}^n \tau_i$ converge vers $1/\lambda$, presque sûrement.
2. En dehors d'un ensemble de probabilité nulle, on a $T_n \sim_{+\infty} n/\lambda$ et donc $T_n^{-2} \sim_{+\infty} \lambda^2/n^2$, ce qui implique la convergence de la série $\sum T_n^{-2}$.
3. En dehors d'un ensemble de probabilité nulle, quand n tend vers l'infini $\sum_{i=1}^n T_i^{-2} \to X$ d'après la question précédente, et quand t tend vers l'infini $N(t) \to +\infty$ d'après le cours. Par composition des limites on a alors $X_{N(t)} \to X$.
4(a). Soit $n \geq 1$ et soit $(U_1^*, \ldots, U_n^*)$ le réarrangé croissant de $(U_1, \ldots, U_n)$. D'après le cours, la loi de $(T_1, \ldots, T_n)$ conditionnellement à l'événement $N(t) = n$ est la statistique d'ordre n sur l'intervalle $[0, t]$, c'est-à-dire la loi du réarrangé croissant de n variables indépendantes identiquement distribuées selon une loi uniforme sur l'intervalle $[0, t]$, autrement dit la loi de $(tU_1^*, \ldots, tU_n^*)$. En particulier la loi conditionnelle de $X_{N(t)}$ sachant $N(t) = n$, qui est celle de $\sum_{i=1}^n T_i^{-2}$ sachant $N(t) = n$, est la loi de $\sum_{i=1}^n (tU_i^*)^{-2}$. En remarquant que $\sum_{i=1}^n (tU_i^*)^{-2} = t^{-2}\sum_{i=1}^n U_i^{-2}$, on obtient le résultat. De plus le résultat est trivialement vrai pour $n = 0$ avec la convention $\sum_{i=1}^0 \ldots = 0$.
4(b). Soit ϕ une fonction test, en utilisant la question précédente, et le fait que la suite $(U_i)_{i\geq 1}$ est indépendante de N, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\,\phi(X_{N(t)}) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{E}\big(\phi(X_{N(t)})\big|N(t) = n\big)\,\mathrm{P}\big(N(t) = n\big) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{E}\,\phi\big(t^{-2}\sum_{i=1}^n U_i^{-2}\big)\,\mathrm{P}\big(N(t) = n\big) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{E}\Big(\phi\big(t^{-2}\sum_{i=1}^n U_i^{-2}\big)\mathbf{1}_{\{N(t)=n\}}\Big) = \mathrm{E}\,\phi\big(t^{-2}\sum_{i=1}^{N(t)} U_i^{-2}\big).
\end{aligned}$$

Ce qui montre que $X_{N(t)}$ et $t^{-2}\sum_{i=1}^{N(t)} U_i^{-2}$ ont même loi.
4(c). Pour $n \geq 1$ posons $V_n = n^{-2}\sum_{i=1}^n U_i^{-2}$. Soit ϕ une fonction continue bornée et $\psi(n) := \mathrm{E}[\phi(V_n)]$. La convergence en loi de V_n vers Z implique que $\psi(n) \to \mathrm{E}[\phi(Z)]$ quand $n \to \infty$.

La variable V_n étant indépendante de N, on a $\mathrm{E}\left[\phi(V_{N(t)})|N(t) = n\right] = \psi(n)$ et donc $\mathrm{E}\left[\phi(V_{N(t)})|N(t)\right] = \psi(N(t))$, qui converge p.s. vers $\mathrm{E}[\phi(Z)]$ puisque $N(t) \to \infty$ p.s. quand $t \to \infty$.

La fonction ϕ étant bornée, il en est de même pour $\mathrm{E}\left[\phi(V_{N(t)})|N(t)\right]$. On peut donc utiliser le théorème de convergence dominée et passer à l'espérance dans la convergence ci-dessus pour aboutir à

$$\mathrm{E}[\phi(V_{N(t)})] = \mathrm{E}\left[\mathrm{E}\left[\phi(V_{N(t)})|N(t)\right]\right] \to \mathrm{E}[\phi(Z)].$$

Ce qui montre que $V_{N(t)}$ converge en loi vers Z quand t tend vers l'infini.
4(d). La loi forte des grands nombres pour N assure que presque sûrement $N(t)/t \to \lambda$ quand t tend vers l'infini. Combiné avec la convergence établie en 4 (c) et le théorème de Slutsky, ceci nous amène à

$$\left(\frac{N(t)}{t}\right)^2 V_{N(t)} \overset{\text{loi}}{\to} \lambda^2 Z.$$

Comme par ailleurs $\left(\frac{N(t)}{t}\right)^2 V_{N(t)}$ a même loi que $X_{N(t)}$ qui converge vers X presque sûrement, on obtient l'égalité $X = \lambda^2 Z$ en loi. On a donc $c' = \lambda^2$.
5. Soit $s \geq 0$, la fonction $x \in \mathbb{R}_+ \to \mathrm{e}^{-sx}$ étant convexe, on a par Jensen $\mathrm{e}^{-s\,\mathrm{E}\,Z} \leq \mathrm{E}\,\mathrm{e}^{-sZ} = \mathrm{e}^{-c\sqrt{s}}$. Ce qui donne $\mathrm{E}\,Z \geq c/\sqrt{s}$ pour tout $s \geq 0$. En faisant tendre s vers 0 on obtient $\mathrm{E}\,Z = +\infty$, et donc $\mathrm{E}\,X = +\infty$. Une autre façon de dire les choses est de raisonner par l'absurde et de remarquer que si X était intégrable, Z le serait aussi et par conséquent la transformée de Laplace de Z serait dérivable en 0, ce qui n'est clairement pas le cas.

Exercice 3.

1. Cf. cours. A noter : la convergence du théorème de renouvellement-clé n'est plus vraie si on omet l'hypothèse de non-arithmicité de la loi des τ_i.

2. Dans le cas d'un processus de Poisson d'intensité λ, la mesure de renouvellement est donnée par $\mathrm{d}m(t) = \delta_0(\mathrm{d}t) + \lambda \mathrm{d}t \mathbf{1}_{\{t \geq 0\}}$. Soit $g : [0, \infty[\to [0, \infty[$ décroissante intégrable. Ceci implique en particulier que $g(t) \to 0$ lorsque $t \to \infty$. On a alors pour $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \int_0^t g(t-x)\mathrm{d}m(x) &= g(t) + \lambda \int_0^t g(t-x)\mathrm{d}x \\ &= g(t) + \lambda \int_0^t g(x)\mathrm{d}x \\ &\underset{t\to\infty}{\to} \lambda \int_0^\infty g(x)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$