

Corrigé du partiel du 30 Mars 2011.

Exercice 1. Partie A. On note μ la mesure de Lebesgue.

1) Dans ce cas particulier $X(B) = N(b)$ et suit donc une loi de Poisson de paramètre λb .

2) La loi de (T_1, \dots, T_n) sachant $\{N(T) = n\}$ est la loi de la statistique d'ordre $(U_i^*)_{1 \leq i \leq n}$ de n variables uniformes $(U_i)_{1 \leq i \leq n}$ sur $[0, T]$ indépendantes et a donc pour densité

$$f(t_1, \dots, t_n) = \frac{n!}{T^n} 1_{0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq T}.$$

3) Soit $k \geq 0$ et $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} P(X(B) = k | N(T) = n) &= P\left(\sum_{i=1}^n 1_{T_i \in B} = k | N(T) = n\right) \\ &= P\left(\sum_{i=1}^n 1_{U_i^* \in B} = k\right) = P\left(\sum_{i=1}^n 1_{U_i \in B} = k\right) \end{aligned}$$

Les variables $(1_{U_i \in B})_{1 \leq i \leq n}$ étant des Bernoulli i.i.d. de paramètre $p := \mu(B)/T$, on en déduit que la loi de $X(B)$ sachant $\{N(T) = n\}$ est une binomiale de paramètres (n, p) (dans le cas $n = 0$, la loi est la mesure de Dirac en 0).

4) On conditionne selon la valeur de $N(T)$. Pour tout $k \geq 0$,

$$\begin{aligned} P(X(B) = k) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(X(B) = k | N(T) = n) P(N(T) = n) \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} e^{-\lambda T} \frac{(\lambda T)^n}{n!} \\ &= e^{-\lambda T} \frac{p^k (\lambda T)^k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(1-p)^{n-k}}{(n-k)!} (\lambda T)^{n-k} \\ &= e^{-\lambda T} \frac{p^k (\lambda T)^k}{k!} e^{(1-p)\lambda T} = e^{-\lambda \mu(B)} \frac{(\lambda \mu(B))^k}{k!}. \end{aligned}$$

On en déduit que $X(B)$ suit une loi de Poisson de paramètre $(\lambda \mu(B))$.

Partie B.

1) On considère la fonction de répartition de M_n : pour $u \geq 0$,

$$\begin{aligned} F_{M_n}(u) &= P(M_n \leq u) \\ &= P(\max\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n\} \leq u) \\ &= P(\tau_1 \leq u, \tau_2 \leq u, \dots, \tau_n \leq u) \\ &= (P(\tau_1 \leq u))^n \\ &= (1 - e^{-\lambda u})^n \end{aligned}$$

2) D'après la question précédente, pour tout $u > 0$

$$P(M_n \leq u \ln n) = e^{n \ln(1 - e^{-\lambda u \ln n})} = e^{n \ln(1 - n^{-\lambda u})} = e^{n(-n^{-\lambda u} + o(n^{-\lambda u}))}.$$

On en déduit que si $\lambda u > 1$, $P(M_n \leq u \ln n) \rightarrow e^0 = 1$. Si $\lambda u = 1$, $P(M_n \leq u \ln n) \rightarrow e^{-1}$. Enfin si $\lambda u < 1$, $P(M_n \leq u \ln n) \rightarrow e^{-\infty} = 0$.

Autrement dit, $\forall u \neq 1/\lambda$,

$$P\left(\frac{M_n}{\ln n} \leq u\right) \rightarrow \mathbf{1}_{u \geq 1/\lambda}.$$

Or la fonction $u \in \mathbb{R} \mapsto \mathbf{1}_{u \geq 1/\lambda}$ est la fonction de répartition de la variable aléatoire constante égale à $1/\lambda$. On en déduit que $M_n/\ln n \rightarrow 1/\lambda$ en loi.

3) On rappelle que la convergence en loi vers une constante équivaut à la convergence en probabilité vers cette constante.

Exercice 2.

1. a) $\mathbb{E}[X_1] < \infty$ ssi $\alpha > 1$ et dans ce cas $\mathbb{E}[X_1] = \frac{\alpha}{\alpha-1}$.

b) De même, $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$ ssi $\alpha > 2$ et dans ce cas $\mathbb{E}[X_1^2] = \frac{\alpha}{\alpha-2}$. On en déduit que $\text{Var}(X_1) = \frac{\alpha}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}$ pour $\alpha > 2$ et n'est pas définie sinon.

Dans ce qui suit, $\alpha > 2$.

2. a) $\mathbb{E}[S(t)] = \mathbb{E}[N(t)]\mathbb{E}[X_1] = \frac{\lambda t \alpha}{\alpha-1}$ car $N(t)$ suit une loi de Poisson de paramètre λt .

b) En utilisant l'indépendance de $N(t)$ et de la suite $(X_i, i \geq 1)$, ainsi que le fait que les $X_i, i \geq 1$ sont i.i.d., on trouve :

$$\text{Var}(S(t)) = \mathbb{E}[\text{Var}(S(t)|N(t))] + \text{Var}(\mathbb{E}[S(t)|N(t)]) = \mathbb{E}[N(t)]\text{Var}(X_1) + \mathbb{E}[X_1]^2\text{Var}(N(t)) = \frac{\lambda t \alpha}{\alpha-2}.$$

3. Prime pure à l'instant t : $\mathbb{E}[S(t)] = \frac{\lambda t \alpha}{\alpha-1}$.

Prime d'assurance à l'instant t fondée sur le principe de la variance :

$$\mathbb{E}[S(t)] + \rho \text{Var}(S(t)) = \lambda t \alpha \left(\frac{1}{\alpha-1} + \frac{\rho}{\alpha-2} \right).$$

4. Pour $u, t \geq 0$, on a :

$$\text{Cov}(S(u), S(t+u)) = \text{Cov}(S(u), S(u)) + \text{Cov}(S(u), S(t+u) - S(u)).$$

Cette dernière covariance est nulle, par indépendance de $S(u)$ et $S(t+u) - S(u)$ (on rappelle que le processus S est à accroissements indépendants et stationnaires). On en déduit que

$$\text{Cov}(S(u), S(t+u)) = \text{Var}(S(u)) = \frac{\lambda u \alpha}{\alpha-2}.$$

5. On suppose $n \geq 1$.

a) Remarquons pour commencer que

$$\mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^{N(t)} e^{-rT_i} X_i | N(t) = n \right] = \mathbb{E}[X_1] \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^{N(t)} e^{-rT_i} | N(t) = n \right]. \quad (1)$$

C'est une conséquence de l'indépendance du processus N et de la suite $(X_i, i \geq 1)$ (qui implique l'indépendance de $(N(t), T_i, i \geq 1)$ et de la suite $(X_i, i \geq 1)$), et du fait que les $X_i, i \geq 1$ ont même loi. En effet :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^{N(t)} e^{-rT_i} X_i | N(t) = n \right] &= \frac{\mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n e^{-rT_i} X_i \mathbf{1}_{N(t)=n} \right]}{\mathbb{P}(N(t) = n)} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i] \mathbb{E} \left[e^{-rT_i} \mathbf{1}_{N(t)=n} \right]}{\mathbb{P}(N(t) = n)} \\ &= \mathbb{E}[X_1] \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left[e^{-rT_i} \mathbf{1}_{N(t)=n} \right]}{\mathbb{P}(N(t) = n)} = \mathbb{E}[X_1] \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^{N(t)} e^{-rT_i} | N(t) = n \right]. \end{aligned}$$

b) Par ailleurs, puisque la loi de (T_1, \dots, T_n) sachant $\{N(t) = n\}$ est la loi de la statistique d'ordre $(U_i^*)_{1 \leq i \leq n}$ de n variables uniformes $(U_i)_{1 \leq i \leq n}$ sur $[0, t]$ indépendantes, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^{N(t)} e^{-rT_i} | N(t) = n \right] &= \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n e^{-rU_i^*} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n e^{-rU_i} \right] = n \mathbb{E} \left[e^{-rU_1} \right] = \frac{n}{t} \int_0^t e^{-rx} dx = \frac{n(1 - e^{-rt})}{tr}. \end{aligned}$$

Ce qui nous amène, avec (??), à

$$\mathbb{E}[\tilde{S}(t) | N(t) = n] = \mathbb{E}[X_1] \frac{n(1 - e^{-rt})}{tr} = \frac{\alpha n(1 - e^{-rt})}{(\alpha - 1)tr}.$$

c) Pour finir, en remarquant que $\mathbb{E}[\tilde{S}(t) | N(t) = 0] = 0$, on obtient

$$\mathbb{E}[\tilde{S}(t)] = \sum_{n \geq 0} \mathbb{E}[\tilde{S}(t) | N(t) = n] \mathbb{P}(N(t) = n) = \mathbb{E}[N(t)] \frac{\alpha(1 - e^{-rt})}{(\alpha - 1)tr} = \frac{\alpha \lambda(1 - e^{-rt})}{(\alpha - 1)r}.$$