

Feuille d'exercices n°1 : Processus de Poisson

Exercice 1. Soit $(\tau_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires positives, i.i.d. On pose :

$$T_n = \tau_1 + \dots + \tau_n, \quad n \geq 1,$$

$(T_0 = 0)$ et

$$N(t) = \#\{i \geq 1 : T_i \leq t\}$$

1. Donner une condition nécessaire pour que la probabilité que le processus $(N(t), t \geq 0)$ n'ait pas de sauts de taille supérieure ou égale à 2 soit strictement positive.
2. Est-il possible que la suite T_n ait une limite finie avec une probabilité strictement positive ?
3. En déduire la probabilité de l'événement $\{\exists t \geq 0 : N(t) = \infty\}$.

Exercice 2. Soit N un processus de Poisson d'intensité $\lambda > 0$. Montrer et interpréter les assertions suivantes :

1. $\mathbb{P}(N(h) = 1) = \lambda h + o(h) \quad (h \rightarrow 0)$
2. $\mathbb{P}(N(h) \geq 2) = o(h) \quad (h \rightarrow 0)$
3. $\mathbb{P}(N(h) = 0) = 1 - \lambda h + o(h) \quad (h \rightarrow 0)$.
4. $\forall t \geq 0, \mathbb{P}(N \text{ saute au temps } t) = 0$.
5. Calculer $\text{Cov}(N(s), N(t)), \forall s, t \geq 0$.

Exercice 3. Soit N un processus de Poisson d'intensité $\lambda > 0$, modélisant les temps d'arrivée des sinistres d'une compagnie d'assurance. Soit T_1 le temps d'arrivée du premier sinistre. Montrer que la loi de T_1 sachant $N(t) = 1$ est uniformément distribuée sur $[0, t]$.

Exercice 4.

1. Montrer que deux processus de Poisson indépendants ne sautent presque jamais simultanément en même temps.
2. Soient N^1 et N^2 deux processus de Poisson indépendants d'intensités respectives $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$. Montrer que le processus défini pour tout $t \geq 0$ par

$$N(t) = N^1(t) + N^2(t)$$

est un processus de Poisson. Préciser son paramètre.

3. En déduire que la somme de n processus de Poisson indépendants d'intensités respectives $\lambda_1 > 0, \dots, \lambda_n > 0$ est un processus de Poisson dont précisera l'intensité.

Exercice 5. Des insectes tombent dans une assiette de soupe suivant un processus de Poisson N d'intensité $\lambda > 0$ ($N(t)$ signifie qu'il y a n insectes dans la soupe au temps t). On suppose que chaque insecte est vert avec probabilité $p \in]0, 1[$, et que sa couleur est indépendante des couleurs des autres insectes. Montrer que le nombre d'insectes verts tombés dans la soupe, en fonction du temps, est un processus de Poisson d'intensité λp .

Exercice 6. Des greffons de foie arrivent à un bloc opératoire suivant un processus de Poisson N d'intensité $\lambda > 0$. Deux patients attendent d'être greffés. Le premier a une durée de vie T (avant greffe) qui suit une loi exponentielle de paramètre μ_1 , le second une durée de vie T' qui suit une loi exponentielle de paramètre μ_2 . Le principe est que le premier greffon qui arrive au bloc est pour le premier patient, s'il est encore en vie, sinon il va au second patient. On suppose que les v.a. T, T' et N sont indépendantes.

1. Calculer la probabilité que le premier patient soit greffé.
2. Calculer la probabilité que le deuxième patient soit greffé.
3. On note X le nombre de greffons arrivés entre $[0, T]$. Déterminer la loi de X .

Exercice 7. Paradoxe de l'autobus On suppose que les arrivées de bus à un arrêt donné suivent un PP d'intensité λ . Vous arrivez à l'arrêt à l'instant t .

1. Intuitivement, quel sera votre temps moyen d'attente avant l'arrivée du prochain bus ?
2. On note $A(t) = T_{N(t)+1} - t$ le temps d'attente avant l'arrivée du prochain bus et $B(t) = t - T_{N(t)}$ le temps qui s'est écoulé depuis le passage du dernier bus. Calculer la loi jointe de $(A(t), B(t))$ (on pourra calculer $\mathbb{P}(A(t) \geq x_1, B(t) \geq x_2)$ pour $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+$).
3. En déduire que les variables $A(t)$ et $B(t)$ sont indépendantes et donner leurs lois respectives.
4. En particulier, que vaut $\mathbb{E}[A(t)]$? Cela correspond-t-il à votre réponse intuitive ?

Exercice 8. LFGN et TCL.

1. Énoncer et montrer la Loi Forte des Grands Nombres pour un processus de Poisson N d'intensité λ .
2. Montrer que N satisfait le Théorème Central Limite suivant quand $t \rightarrow \infty$

$$\frac{N(t) - \lambda t}{\sqrt{\lambda t}} \xrightarrow{\text{loi}} Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

- (a) en utilisant les fonctions caractéristiques
- (b) en commençant par montrer que $(N(n) - \lambda n) / \sqrt{\lambda n}$ converge en loi vers Z , puis que $\max_{t \in (n, n+1]} (N(t) - N(n)) / \sqrt{n} \rightarrow 0$ en probabilité.

Exercice 9.

1. Rappeler la (une) densité du n -uplet (T_1, \dots, T_n) sachant $N(t)$ lorsque N est un PP d'intensité λ et $0 < T_1 < \dots < T_n < \dots$ ses temps de saut.
2. En déduire une densité de T_i sachant $N(t)$, $\forall 1 \leq i \leq n$ et celle de (T_i, T_j) sachant $N(t)$, $\forall 1 \leq i < j \leq n$.
3. On pose $U_{i,j} = T_j - T_i$, $1 \leq i < j \leq n$. Donner une densité de $U_{i,j}$ sachant $N(t)$. En déduire une densité de l'étendue $T_n - T_1$ sachant $N(t)$.

Exercice 10. Martingales. Soit $X = (X(t), t \geq 0)$ un processus à temps continu et $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ une *filtration*, c'est-à-dire une famille de tribus emboîtées $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{A}$ $\forall s \leq t$, où \mathcal{A} est la tribu de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sur lequel on travaille. On dit que X est une *martingale* par rapport à la filtration \mathcal{F} si $X(t)$ est intégrable $\forall t$ et

$$\mathbb{E}[X(t)|\mathcal{F}_s] = X(s), \quad \forall 0 \leq s \leq t.$$

Soit $N = (N(t), t \geq 0)$ un processus de Poisson d'intensité $\lambda > 0$. Montrer que les trois processus $(N(t) - \lambda t, t \geq 0)$, $((N(t) - \lambda t)^2 - \lambda t, t \geq 0)$ et $(\exp(uN(t) + \lambda t(1 - e^u)), t \geq 0)$ (pour u fixé dans \mathbb{R}) sont des martingales par rapport à la filtration engendrée par N .