

**Feuille d'exercices n°2 : Mélange de Processus de Poisson,
étude de la charge sinistrale totale à temps fixe.**

Exercice 1. Soit \tilde{N} un mélange de processus de Poisson et $0 < \tilde{T}_1 < \dots < \tilde{T}_n < \dots$ ses temps de saut. Montrer que la loi de $(\tilde{T}_1, \dots, \tilde{T}_n)$ sachant $N(t) = n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) est celle de la statistique d'ordre de n v.a. i.i.d. uniformément distribuées sur $[0, t]$.

Exercice 2. On rappelle qu'une variable aléatoire X suit une loi binomiale négative sur $\{0, 1, 2, \dots\}$ de paramètres $r > 0$ et $p \in]0, 1[$ si

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\Gamma(r + k)}{\Gamma(r)n!} p^r (1 - p)^k, \quad \forall k \geq 0.$$

Soit \tilde{N} un mélange de processus de Poisson de loi mélangeante $\Theta \sim \Gamma(\gamma, \beta)$. Quelle est la loi de $\tilde{N}(t)$? Le processus \tilde{N} est alors appelé *processus binomial négatif*. La loi binomiale négative est aussi appelée loi de Poisson-mélange ou loi mélange Gamma-Poisson.

Exercice 3. La charge sinistrale d'un portefeuille de risques pour une année est représentée par la variable $X = \sum_{j=1}^N C_j$ où N est le nombre de sinistres de l'année et C_j le coût du j -ième sinistre de l'année. On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre aléatoire Λ (c'est-à-dire que la loi conditionnelle de N sachant $\Lambda = \lambda$ est une loi de Poisson de paramètre λ). La variable Λ suit ici une loi $\Gamma(b, b)$, $b > 0$. On suppose que les coûts des sinistres $(C_j)_{j \geq 1}$ sont des variables indépendantes entre elles et indépendantes de N , équidistribuées selon la loi de C_1 .

1. Calculer $\mathbb{E}(\Lambda)$ et $\text{Var}(\Lambda)$
2. Rappeler les valeurs de $\mathbb{E}(N|\Lambda)$ et $\text{Var}(N|\Lambda)$ et en déduire $\mathbb{E}(N)$ et $\text{Var}(N)$.
3. On suppose que la loi de C_1 est la loi exponentielle de paramètre $\alpha > 0$. Montrer que la loi de X sachant N est une loi Γ dont on précisera les paramètres. Déterminer la prime pure proposée par l'assureur, prime fondée sur le risque du coût des sinistres.

Exercice 4. Pour une année i , la charge sinistrale d'un portefeuille de risques est représentée par la variable $Y_i = \sum_{j=1}^{N_i} C_{ij}$ où N_i est le nombre de sinistres de l'année i et C_{ij} le coût du j -ième sinistre de l'année i ; Y_i est le montant cumulé des sinistres de l'année i . On suppose que N_i suit une loi de Poisson de paramètre aléatoire Λ et que sachant Λ , les N_i sont indépendants. On suppose que les coûts $(C_{ij})_{i,j \geq 1}$ des sinistres de l'année i sont indépendants des N_i , $i \geq 1$, indépendants entre eux et équidistribués. Enfin, on suppose que Λ est une variable aléatoire de loi $\Gamma(b, b)$, $b > 0$.

1. Rappeler les valeurs de $\mathbb{E}[N_i|\Lambda]$ et $\text{Var}(N_i|\Lambda)$. En déduire $\mathbb{E}(N_i)$ et $\text{Var}(N_i)$.
2. On suppose que la loi des (C_{ij}) est la loi exponentielle de paramètre α . En déduire $\mathbb{E}(Y_i)$ et $\text{Var}(Y_i)$ et montrer que la loi de Y_i sachant N_i est la loi $\Gamma(N_i, \alpha)$. Retrouver alors les valeurs de $\mathbb{E}(Y_i)$ et $\text{Var}(Y_i)$.

3. Montrer que la loi de $(\Lambda|Y_i, N_i)$ est une loi indépendante de Y_i , de densité celle d'une loi Γ dont on précisera les paramètres.

On voudrait maintenant prévoir la sinistralité de l'année $i + 1$ en fonction de l'historique observé lors de l'année i .

4. Pour $i = 2$, déterminer la loi de $(\Lambda|N_1, Y_1, N_2, Y_2)$ et en déduire $\mathbb{E}[\Lambda|N_1, Y_1, N_2, Y_2]$.
5. Calculer $\mathbb{E}[N_3|N_1, Y_1, N_2, Y_2]$ et la prime pure à prévoir pour la troisième année, soit $\mathbb{E}[Y_3|N_1, Y_1, N_2, Y_2]$.

Exercice 5. On considère un groupe de risques dont le nombre N de sinistres annuel suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$ (i.e. $\mathbb{P}(N) = p(1 - p)^n, \forall n \in \mathbb{N}$). On suppose que le montant annuel cumulé des sinistres S est défini par :

$$S = \sum_{i=1}^N X_i$$

où les $X_i, i \in \mathbb{N}^*$ représentent les coûts des sinistres ($S = 0$ si $N = 0$).

1. Rappeler les hypothèses usuelles de ce modèle.
2. Déterminer la fonction génératrice des moments de S en fonction de celle de X_1 .
3. Exprimer $\mathbb{E}[S]$ et $\text{Var}(S)$ en fonction de p et des moments de X_1 .
4. Indiquer ce que deviennent les formules de la question précédente lorsque les $X_i, i \geq 1$ sont distribuées suivant une loi exponentielle de paramètre $\alpha > 0$. Déterminer ensuite la fonction de répartition de S .
5. On suppose que le chargement technique est fondé sur l'écart-type (i.e. de la forme $\lambda\sigma(S)$). On note R le montant de réserves. Calculer la prime d'assurance $\Pi(S)$ et la probabilité de ruine de l'assureur pour l'année en cours, à savoir

$$\mathbb{P}(R + \Pi(S) - S < 0),$$

en fonction de p, α, λ et R .

Exercice 6. On s'intéresse ici à un contrat de réassurance. Le principe est que le réassureur couvre les pertes supérieures à une franchise K fixée à l'avance. La charge sinistrale totale du réassureur est donc de la forme

$$X = \sum_{i=1}^N (C_i - K)^+.$$

On suppose que le nombre de sinistres N est une variable aléatoire de Poisson de paramètre λ et que les coûts C_i sont des variables aléatoires indépendantes, équidistribuées de loi F_C , et indépendantes de N .

1. Calculer la fonction génératrice des moments φ_{Y_1} de $Y_1 = (C_1 - K)^+$ quand F_C est la loi exponentielle $\mathcal{E}(\gamma)$. Préciser son domaine de définition et en déduire l'espérance $\mathbb{E}[Y_1]$.

2. Rappeler l'expression de la fonction génératrice des moments φ_N de N et exprimer la fonction génératrice des moments φ_X de X en fonction de celle de Y .
3. Déterminer le montant de la prime $\pi(X)$, fondée sur l'espérance, dont le coefficient de chargement technique est $\rho > 0$.
4. Soit N_K le nombre de sinistres de coût supérieur à K . Calculer la fonction génératrice des moments φ_{N_K} de N_K . En déduire que la loi de N_K est une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.
5. Soit

$$\tilde{X} = \sum_{i=1}^{N_K} C_i$$

Calculer la fonction génératrice des moments $\varphi_{\tilde{X}}$ de \tilde{X} . En déduire que la loi de \tilde{X} est la même que celle de X .

6. Quelle serait la prime $\pi(\tilde{X})$ si la loi F_C était la loi log-Normale (μ, σ^2) ?