

Feuille d'exercices n°3 :
Processus de Poisson composés, processus de renouvellement.

Exercice 1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un processus de Poisson composé soit un processus de Poisson standard.

Exercice 2. Trouver la fonction de renouvellement et la mesure de renouvellement d'un processus de renouvellement lorsque les temps d'inter-arrivée sont distribués suivant une loi Gamma de paramètres 2, $\lambda > 0$. Démontrez les théorèmes de renouvellement élémentaire et clé dans ce cas.

Exercice 3. Soit N un processus de renouvellement et $F(t) = T_{N(t)+1} - t$ le temps écoulé entre le temps t et le temps du $N(t) + 1$ -ième renouvellement, $t \geq 0$. On note \mathbb{P}_{T_1} la loi des temps d'inter-arrivée et F_{T_1} sa fonction de répartition.

1. Montrer que pour tout $x \geq 0$, la fonction $\mathbb{P}(F(t) > x)$ vérifie l'équation de renouvellement

$$\mathbb{P}(F(t) > x) = 1 - F_{T_1}(t + x) + \int_0^t \mathbb{P}(F(t - u) > x) d\mathbb{P}_{T_1}(u), \quad t \geq 0.$$

On pourra commencer par découper la probabilité $\mathbb{P}(F(t) > x)$ en deux, suivant que $T_1 > t$ ou $T_1 \leq t$.

2. Résoudre cette équation lorsque les temps d'inter-arrivée suivent une loi exponentielle.