Processus de Poisson et méthodes actuarielles (2009-2010)
M1 MMD-MA

Feuille d'exercices n°5 : théorie de la crédibilité.

Exercice 1. On considère un portefeuille de risque dont le paramètre d'hétérogénéité Θ suit une loi $\beta(a,b)$, $a,b>0$, c'est-à-dire a une densité sur $]0,1[$ donnée par

$$f_\Theta(x)=\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1}, 0<x<1.$$

On suppose que sachant Θ, les variables $X_i, i\geq 1$ représentant les coûts des sinistres successifs sont indépendantes de même loi $\mathrm{Bin}(k,\theta)$, où k est un entier supérieur à 1 fixé.

1. Montrer que $\mathbb{E}[\Theta]=a/(a+b)$ et $\mathrm{Var}(\Theta)=ab/[(a+b+1)(a+b)^2]$.
2. Calculer la densité conditionnelle de Θ sachant $(X_1,...,X_n)$.
3. On pose $\mu(\Theta)=\mathbb{E}[X_1|\Theta]$. Calculer l'estimateur bayésien $\hat\mu(\Theta)$ de $\mu(\Theta)$ fondé sur l'observation $(X_1,...,X_n)$. En déduire la valeur du risque quadratique correspondant.
4. Que représentent les quantités $\mu(\Theta)$ et $\hat\mu(\Theta)$? Quel est le lien entre $\hat\mu(\Theta)$ et $\mathbb{E}[X_{n+1}|X_1,...X_n]$?
5. Expliquer pourquoi on choisit $\hat\mu(\Theta)$ pour estimer $\mu(\Theta)$ plutôt qu'un autre estimateur.

Exercice 2. On considère un portefeuille de risque dont le paramètre d'hétérogénéité Θ est une variable aléatoire de densité f_Θ sur $(0,\infty)$. Conditionnellement à $\Theta=\theta$, les coûts des sinistres observés sur n années, $(X_i)_{i=1\ldots n}$, sont des variables aléatoires supposées indépendantes entre elles et équidistribuées selon la loi de Poisson $\mathcal{P}(\theta)$.

1. Déterminer la densité conditionnelle de $(\Theta|X)$. On calculera pour cela, la densité $f_\Theta(\theta|X=k)$ pour $k=0,1,\ldots$. Puis déterminer la densité de $(\Theta|X_1,\ldots,X_n)$.
2. Dans le cas où $n=1$, déterminer l'estimateur bayésien de Θ, $\hat\Theta$, défini pour tout $k=0,1,\ldots$ par $m_k=\hat\Theta(k)=\mathbb{E}(\Theta|X=k)$. Montrer que
$$\mathbb{E}[\Theta^l|X=k]=\prod_{i=0}^{l-1}m_{k+i}.$$
En déduire $v_k=$Var $(\Theta|X=k)$.
3. Calculer la valeur du risque
$$\rho(\hat\Theta)=E[(\Theta-\hat\Theta)^2].$$
4. En déduire l'estimateur bayésien $\hat\mu_{\mathrm{B}}$ de Θ, fondé sur l'observation de $(X_1,\ldots X_n)$.

5. Dans le cas où $n = 2$, comparer $\hat{\mu}_{\mathrm{B}}$ avec l'estimateur linéaire bayésien $\tilde{\mu}_{\mathrm{LB}} = c_0 + c_1 X_1 + c_2 X_2$.

Exercice 3. Pour une année i, la charge sinistrale d'un portefeuille de risques est représentée par la variable $Y_i = \sum_{j=1}^{N_i} C_{ij}$ où N_i est le nombre de sinistres de l'année i et C_{ij} le coût du j-ième sinistre de l'année i ; Y_i est le montant cumulé des sinistres de l'année i. On suppose que N_i suit une loi de Poisson de paramètre aléatoire Λ et que sachant Λ, les N_i sont indépendants. On suppose que les coûts $(C_{ij})_{i,j\geq 1}$ des sinistres de l'année i sont indépendants des $N_i, i \geq 1$, indépendants entre eux et équidistribués. Enfin, on suppose que Λ est une variable aléatoire de loi $\Gamma(b, b), b > 0$.

1. Rappeler les valeurs de $\mathbb{E}[N_i|\Lambda]$ et $\mathrm{Var}(N_i|\Lambda)$. En déduire $\mathbb{E}(N_i)$ et $\mathrm{Var}(N_i)$.
2. On suppose que la loi des (C_{ij}) est la loi exponentielle de paramètre α. En déduire $\mathbb{E}(Y_i)$ et $\mathrm{Var}(Y_i)$ et montrer que la loi de Y_i sachant N_i est la loi $\Gamma(N_i, \alpha)$. Retrouver alors les valeurs de $\mathbb{E}(Y_i)$ et $\mathrm{Var}(Y_i)$.
3. Montrer que la loi de $(\Lambda|Y_i, N_i)$ est une loi indépendante de Y_i, de densité celle d'une loi Γ dont on précisera les paramètres.

   On voudrait maintenant prévoir la sinistralité de l'année $i+1$ en fonction de l'historique observé lors de l'année i.
4. Pour $i = 2$, déterminer la loi de $(\Lambda|N_1, Y_1, N_2, Y_2)$ et en déduire $\mathbb{E}[\Lambda|N_1, Y_1, N_2, Y_2]$.
5. Calculer $\mathbb{E}[N_3|N_1, Y_1, N_2, Y_2]$ et la prime pure à prévoir pour la troisième année, soit $\mathbb{E}[Y_3|N_1, Y_1, N_2, Y_2]$.