

**Examen du 26 Janvier 2010.**

*Durée : 2 heures.*

Les documents, calculatrices et portables sont interdits.  
Les réponses non justifiées ne seront pas prises en compte.

**Exercice 1 (7 points).** *Les questions 1 et 2 sont indépendantes.* On rappelle qu'une v.a. réelle suit une loi Gamma de paramètres  $a > 0, \lambda > 0$ , notée  $\mathcal{G}(a, \lambda)$ , si elle admet pour densité la fonction

$$x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} \exp(-\lambda x) \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x),$$

où  $\Gamma$  est la fonction  $\Gamma$  d'Euler définie par

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} y^{a-1} \exp(-ay) dy, \quad \forall a > 0.$$

1. (a) Montrer qu'une loi exponentielle de paramètre  $\lambda > 0$  est une loi Gamma de paramètres que l'on précisera.
- (b) Montrer que la fonction génératrice des moments,  $G_{a,\lambda}$ , d'une loi  $\mathcal{G}(a, \lambda)$ ,  $a, \lambda > 0$ , est donnée par

$$G_{a,\lambda}(t) = \left( \frac{\lambda}{\lambda - t} \right)^a, \quad \forall t < \lambda.$$

- (c) En déduire la loi de  $X + Y$ , lorsque  $X$  et  $Y$  sont indépendantes de lois respectives  $\mathcal{G}(a, \lambda)$  et  $\mathcal{G}(b, \lambda)$ .
  - (d) En déduire la loi de  $X_1 + \dots + X_n$ , lorsque les  $X_i, 1 \leq i \leq n$ , sont indépendantes de même loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ . Donner alors la fonction génératrice des moments  $G_{Y_n}$  de la variable  $Y_n = (X_1 + \dots + X_n)/n$ , en précisant son ensemble de définition.
  - (e) Calculer,  $\forall t \in \mathbb{R}$ , la limite  $G(t) := \lim_{n \rightarrow \infty} G_{Y_n}(t)$ . La fonction  $G$  est la fonction génératrice des moments d'une v.a. réelle simple. Laquelle ?
2. On s'intéresse ici à la loi de  $Z_n = \min(X_1, \dots, X_n)$ , où les  $X_i, 1 \leq i \leq n$ , désignent toujours des variables indépendantes de même loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ .
    - (a) Calculer  $\mathbb{P}(Z_n > t), \forall t \in \mathbb{R}$ .
    - (b) En déduire la loi de  $Z_n$ , puis celle de  $nZ_n$ .

**Exercice 2 (7 points).**  $X$  et  $Y$  sont deux lois exponentielles indépendantes de paramètres respectifs  $\lambda > 0$  et  $\mu > 0$ . On pose  $(U, V) = \left( X + Y, \frac{X}{X+Y} \right)$ .

1. Donner une densité de  $(X, Y)$ .
2. Montrer que  $(U, V)$  est un couple continu de densité

$$f_{(U,V)}(u, v) = \lambda \mu \exp(-(\lambda - \mu)uv) \exp(-\mu u) u \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(u) \mathbf{1}_{]0,1[}(v).$$

3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur  $\lambda$  et  $\mu$  pour que  $U$  et  $V$  soient indépendantes.
4. Quelle est la loi de  $V$  lorsque cette condition est vérifiée ?

5. Lorsque  $U$  et  $V$  ne sont pas indépendantes, calculer la densité conditionnelle de  $V$  sachant  $U = u$ , pour les réels  $u$  où cela a un sens (préciser ces réels  $u$ ).
6. En déduire  $\mathbb{E}(V|U)$ .

**Exercice 3 (6 points).** On effectue une suite infinie de lancers de dés. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  on note  $X_n$  le temps d'attente de la première série de  $n$  six consécutifs :  $X_1$  est le temps auquel le six sort pour la première fois,  $X_2$  le temps auquel deux six d'affilée sortent pour la première fois et ainsi de suite. Par exemple la suite

2, 3, 6, 4, 4, 1, 5, 5, 3, 6, 6, 6, 1, 3, ...

donne  $X_1 = 3$ ,  $X_2 = 11$ ,  $X_3 = 12$ , etc. . .

1. Déterminer la loi de  $X_1$ , puis  $\mathbb{E}[X_1]$ .
2. (a) Quelle est la loi de  $X_1 - n$  sachant  $X_1 > n$  ?  
 (b) En déduire le temps moyen d'attente avant d'obtenir un six sachant qu'on n'a pas eu de six au cours des  $n$  premiers lancers.
3. Soit  $n \geq 2$ , montrer que

$$\mathbb{E}(X_n|X_{n-1}) = \frac{1}{6}(X_{n-1} + 1) + \frac{5}{6}(X_{n-1} + 1 + \mathbb{E}(X_n))$$

4. En déduire une relation de récurrence pour  $\mathbb{E}[X_n]$ .
5. Déterminer  $\mathbb{E}[X_n]$ .