

Feuille d'exercice n°1 :
espace de probabilité, conditionnement, indépendance

Exercice 1.

1. Montrer qu'un événement A est indépendant de lui-même si et seulement si $\mathbb{P}(A) = 0$ ou $\mathbb{P}(A) = 1$.
2. Si $\mathbb{P}(A) = 0$, montrer que A est indépendant de tous les événements B . Ce résultat reste-t-il vrai si on remplace l'hypothèse $\mathbb{P}(A) = 0$ par $\mathbb{P}(A) = 1$?

Exercice 2. Soit a un réel et δ_a l'application

$$\delta_a : A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } a \in A \\ 0 & \text{si } a \notin A. \end{cases}$$

Montrer que δ_a est une probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$.

Exercice 3. Une urne contient une boule noire et $n - 1$ boules blanches. On effectue n tirages au hasard d'une boule avec remise.

1. Quelle est la probabilité p_n que la boule noire ne sorte à aucun des tirages ?
2. Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$.

Exercice 4. Soient A, B, C 3 événements. Montrer que

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cup B) - \mathbb{P}(B \cup C) - \mathbb{P}(C \cup A) + \mathbb{P}(A \cup B \cup C).$$

Exercice 5. N étudiants nés en 1990 assistent à un même cours de probabilité. On suppose que leurs dates de naissances sont indépendantes. Modéliser l'expérience aléatoire correspondante et montrer que la probabilité que deux étudiants au moins aient leur anniversaire un même jour est égale à $1 - (365)! / ((365 - N)! 365^N)$.

Exercice 6. On considère une suite d'événements $(A_n, n \geq 1)$ tels que $\mathbb{P}(A_n) = 1$, $\forall n \geq 1$. Montrer que $\mathbb{P}(\bigcap_{n \geq 1} A_n) = 1$.

Exercice 7. Une puce se déplace par sauts successifs sur les sommets A,B,C et le centre de gravité O d'un triangle équilatéral. Au temps $t = 0$ elle est en O. Par la suite, elle saute au temps n du point où elle se trouve en l'un des 3 autres points de façon équiprobable.

1. Calculer la probabilité que la puce revienne en O pour la première fois au temps n .
2. Calculer la probabilité que la puce revienne en O. Commenter ce résultat.

Exercice 8. On considère n urnes numérotées de 1 à n . Pour tout k , $1 \leq k \leq n$, l'urne n° k contient k boules blanches et $n - k$ boules noires. On choisit au hasard une urne, puis on tire deux boules de cette urne avec remise.

1. Calculer la probabilité d'obtenir deux boules blanches.
2. Sachant que les deux boules tirées sont blanches, calculer la probabilité que le tirage ait été fait dans l'urne n° k .

Exercice 9. On lance un nombre aléatoire $N \in \mathbb{N}$ de dés. On note A_i l'événement $\{N = i\}$ et on suppose que $\mathbb{P}(A_i) = 2^{-i}$, $\forall i \geq 1$. On note S la somme des résultats obtenus.

1. Montrer que $(A_i, i \geq 1)$ forme une partition de Ω et qu'on a bien $\sum_{i \geq 1} \mathbb{P}(A_i) = 1$.
2. Calculer la probabilité que $N = 2$ sachant que $S = 4$.
3. Calculer la probabilité que $S = 4$ sachant que N est pair.
4. Calculer la probabilité que $N = 2$ sachant que $S = 4$ et le premier dé donne 1.

Exercice 10. On dispose d'une urne blanche contenant une proportion p de boules noires et $(1 - p)$ de boules blanches, et d'une urne noire contenant une proportion q de boules blanches et $1 - q$ de boules noires ($0 \leq p \leq 1, 0 \leq q \leq 1$). On effectue les tirages avec remises selon le protocole suivant :

- le premier tirage se fait dans l'urne blanche
- si au k -ième tirage d'ordre, on tire une boule blanche, le $(k + 1)$ -ième tirage se fait dans l'urne blanche, sinon il se fait dans l'urne noire.

On note p_n la probabilité d'avoir une boule blanche au n -ième tirage, $n \geq 1$. Calculer p_n et sa limite lorsque $n \rightarrow \infty$.

Exercice 11. Une urne contient initialement a boules blanches et b boules noires. On effectue une suite infinie de tirages d'une boule dans cette urne selon le protocole suivant : à chaque tirage, on remet la boule tirée dans l'urne, avec en plus une boule de même couleur.

1. On appelle N_i l'événement "on tire une boule noire au i ème tirage" et A_n l'événement : "on tire la première boule blanche au n ème tirage". Exprimer A_n en fonction des N_i et calculer $p_n = \mathbb{P}(A_n)$.
2. Soit B_n l'événement "les n premiers tirages amènent des boules noires". Donner l'expression de $\mathbb{P}(B_n)$ sous forme d'un produit. A l'aide des séries, montrer que la suite $\ln(\mathbb{P}(B_n))$ tend vers $-\infty$ quand $n \rightarrow \infty$.
3. Soit B l'événement "on n'obtient que des boules noires". Montrer que $\mathbb{P}(B) = 0$ et interpréter ce résultat.

4. En déduire que $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$.

Exercice 12. Soit $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ une suite d'événements indépendants.

1. Exprimer en fonction des $p_k = \mathbb{P}(A_k)$ la probabilité q_n qu'aucun des n premiers événements A_1, A_2, \dots, A_n ne se réalise.
2. Montrer que $1-x \leq \exp(-x)$ pour tous $x \in \mathbb{R}$. En déduire que $q_n \leq \exp(-\sum_{k=1}^n p_k)$.
3. On suppose que la série de terme général p_n diverge. Quelle est alors la limite de q_n lorsque $n \rightarrow \infty$? En déduire la valeur de $\mathbb{P}(B)$, où $B = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k^c$.
4. Un singe tape une infinité de fois au hasard sur une machine à écrire comprenant 27 touches, les 26 lettres de l'alphabet et la touche "espace" (il n'y a donc pas la possibilité de mettre des accents). On suppose que les frappes du singe sont indépendantes les unes des autres et qu'à chaque frappe, chaque caractère a une probabilité égale à $1/27$ d'être choisi. On s'intéresse aux apparitions du mot "dauphine" dans le texte obtenu par le singe. Pour cela, on note A_1 l'événement "le premier caractère est un d , le 2ème un a , le 3ème un u , le 4ème un p , le 5ème un h , le 6ème un i , le 7ème un n , le 8ème un e , et plus généralement, $\forall n \geq 0$,

A_{n+1} l'événement : "le $(8n+1)$ ème caractère est un d , le $(8n+2)$ ème un a , le $(8n+3)$ ème un u , le $(8n+4)$ ème un p , le $(8n+5)$ ème un h , le $(8n+6)$ ème un i , le $(8n+7)$ ème un n , le $(8n+8)$ ème un e ".

Montrer que les A_n sont indépendants. En déduire que le mot dauphine apparaît dans le texte du singe au moins une fois presque sûrement. (Plus généralement, on peut montrer qu'il apparaît une infinité de fois p.s.)

Exercice 13. Ruine du joueur. Un collectionneur de voitures veut gagner de l'argent pour acheter une nouvelle Jaguar à un prix $N \in \mathbb{N}$. Il possède initialement une somme n , $0 \leq n \leq N$, et veut gagner le reste en jouant à un jeu de hasard avec son banquier. Pour cela, il jette de façon répétée une pièce de monnaie (biaisée) : Pile apparaît avec une probabilité p , Face avec probabilité $q = 1 - p$. A chaque Pile, il gagne la somme 1, à chaque Face, il perd 1. Le jeu s'arrête lorsque il a en main la somme N ou lorsqu'il est ruiné. On note r_n la probabilité qu'il soit ruiné à la fin du jeu.

1. (a) Calculer r_0 et r_N .
(b) Pour $1 \leq n \leq N$, montrer que $r_n = pr_{n+1} + qr_{n-1}$.
2. On suppose $p \neq 1/2$.
(a) Montrer que pour $1 \leq n \leq N$,

$$r_n = \frac{(q/p)^n - (q/p)^N}{1 - (q/p)^N}.$$

(b) On suppose $p < 1/2$. Montrer que $\lim_{N \rightarrow \infty} r_n = 1$ (n étant fixé). Interpréter ce résultat.

(c) On suppose $p > 1/2$. Montrer que lorsque $N \rightarrow \infty$ (n étant fixé), le jouer ne sera pas forcément ruiné.

3. On suppose que $p = 1/2$. Montrer que pour $1 \leq n \leq N$, $r_n = 1 - n/N$.

Exercice 14. Quatre témoins A, B, C et D participant à un procès disent chacun la vérité avec probabilité $1/3$, indépendamment les uns des autres. Lors de leurs témoignages, A affirme que B a démenti que C a déclaré que D est un menteur. Quelle est la probabilité que D ait dit la vérité ?

Exercice 15. Les n passagers d'un vol Air France ont reçu leurs numéros de siège. L'avion a exactement n sièges. Les passagers entrent dans l'avion un par un. La première personne se trompe et ne s'assied pas à sa place. On suppose qu'elle s'assoit à une des $n - 1$ autres places de façon équiprobable. Les passagers suivants s'asseyent à leur place lorsqu'elle est libre et sinon choisissent un siège libre uniformément au hasard. Quelle est la probabilité que le dernier passager s'asseye à sa place ?